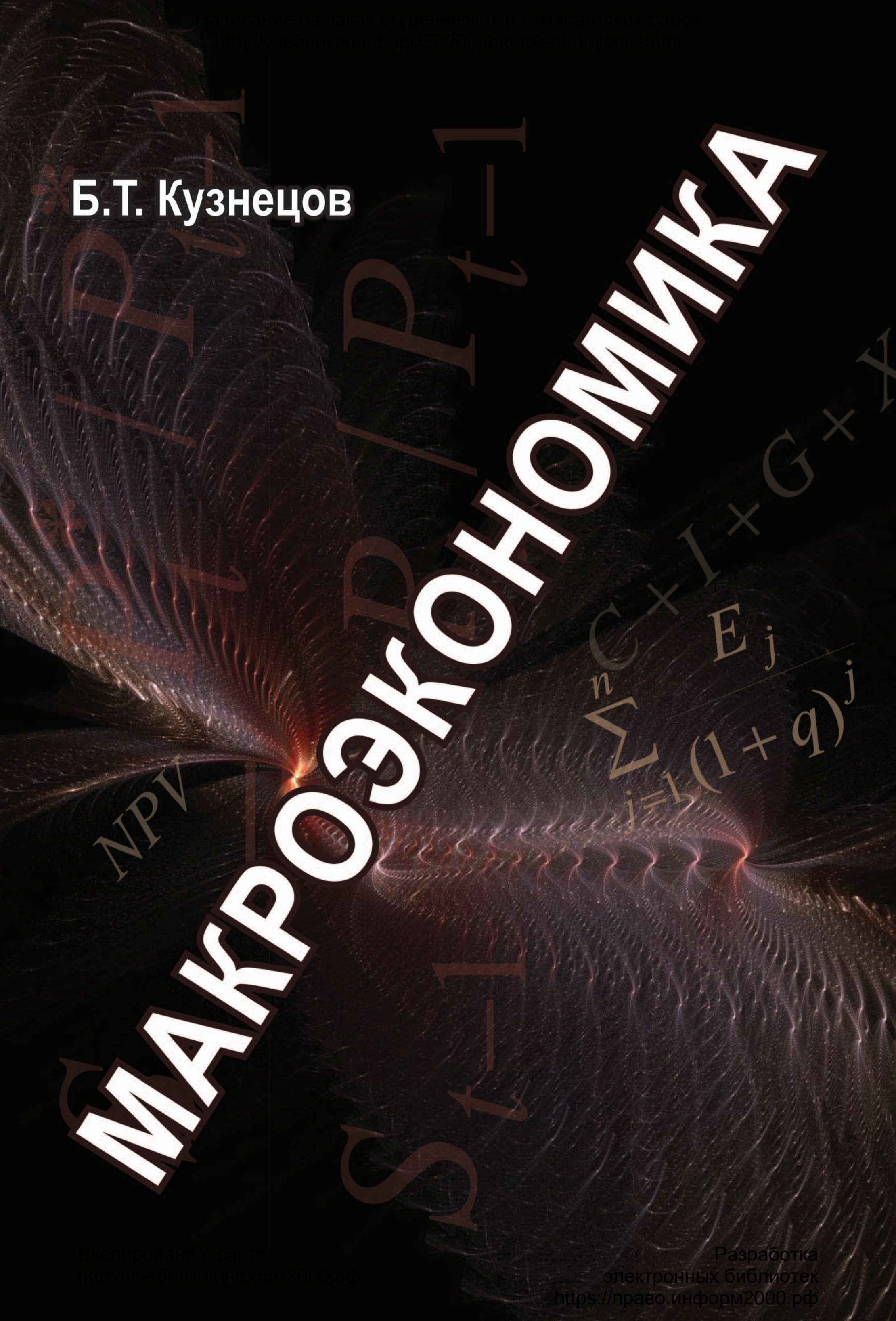
Б.Т. Кузнецов

МАКРОЭКОНОМИКА



Введение

Макроэкономика — это наука о хозяйственной деятельности людей и развитии этой деятельности в отдельных регионах, странах и в мире в целом. Изучение макроэкономических явлений базируется, в основном, на создании и анализе макроэкономических моделей. Эти модели строятся на основе выявленных зависимостей между различными сводными, обобщающими и другими экономическими показателями, отражающими объемы производства и потребления, уровень богатства и бедности отдельных людей и общества в целом, качество производственных процессов, экспорт и импорт, инвестиционные процессы, темпы роста и т.д.

Проблемы развития экономики привлекали людей с древнейших времен. В Древнем Китае еще до новой эры труд делили на умственный и физический. Ясно, что представителями умственного труда выступали богатые классы. Но уже тогда высказывались идеи о равенстве от рождения всех людей. Эта мысль красной нитью проходит во многих учениях на протяжении десятков веков. Автором основного принципа социализма «Кто не работает, тот не ест» является апостол Павел. Идеи создания нового справедливого общества выдвигали англичанин Т. Мор (1478—1535) в начале XVI в., итальянец Т. Кампанелла (1568—1639) в начале XVII в., французы К.А. Сен-Симон (1760—1825) и Ш. Фурье (1772—1837), а также англичанин Р. Оуэн (1771—1858) в начале XIX в. Именно Р. Оуэн назвал предложенную им социальную систему *коммунизмом*.

Основоположником классического либерализма считается шотландский экономист А. Смит (1723—1790). Основной смысл его учения заключается в минимальном вмешательстве в рыночные процессы саморегулирования экономики на основе свободных цен, зависящих от спроса и предложения. Такой регулятор он назвал «*невидимой рукой*». Многие экономисты работали над усовершенствованием и развитием теории А. Смита. Значительный вклад в развитие экономики капитализма внес немецкий ученый К. Маркс (1818—1883). На основе идей социалистов-утопистов и представителей классической политической экономики Маркс создал новую теорию, получившую название *марксизм*. Основой марксизма явилась общественная собственность на средства производства, отсутствие эксплуатации, всеобщая занятость. Догматический подход при реализации идей марксизма в России привел к распаду Советского Союза и, таким образом, скомпрометировал во многом справедливое учение.

Экономика — это постоянно развивающийся и обновляющийся процесс. Его нельзя рассматривать как догму. Это следует, например, из пересмотра основных положений либерализма А. Смита во время Великой депрессии 1929—1933 гг. Английский экономист Дж.М. Кейнс (1883—1946) подверг сомнению основное положение учения А. Смита о невмешательстве государства в макроэкономические процессы. Например, он предложил для выхода из кризиса перенасыщения, имевшего в это время место в Америке, организовать общественные работы за счет государственного финансирования. Причем эти работы были направлены на строительство дорог, электростанций и других сооружений инфраструктуры. Таким образом, не приводя к увеличению товаров на перенасыщенном рынке, эти работы повысили доходы населения, что привело к возможности реализации залежавшихся товаров. Макроэкономика как наука зародилась именно в это время. Кейнсианская экономическая теория оставалась доминирующей вплоть до 1960 г. Оказалось, что слишком высокие государственные расходы приводят к быстрому возрастанию государственного долга. Предложения для борьбы с этим явлением поступили от неоклассиков. Одним из направлений неоклассицизма является *монетаризм*.

Основоположником монетаризма считают американского экономиста М. Фридмена (1912—2006). В теории монетаризма основную роль в стабилизации экономики играют денежные факторы. Участие государства в развитии экономики монетаристы видят в его контроле над денежной массой и в достижении сбалансированного государственного бюджета.

Нетрудно заметить, что при переходе от одной экономической формации к другой изменялась мотивация, заставлявшая людей трудиться. В первобытном обществе и позже, вплоть до построения развитого капиталистического общества, бóльшая часть людей трудилась для того, чтобы не умереть от голода. Этот фактор выживания, а также политические системы различных государств определяли производственные отношения и основные показатели макроэкономики. Такой важнейший фактор развития экономики, как конкуренция, в этом обществе практически не был задействован. С развитием технологий в капиталистическом обществе конкуренция все больше обострялась, что приводило к более интенсивному развитию технологий. В это время в развитых странах большей части работников доходов хватало не только для удовлетворения жизненно необходимых потребностей, но и для накопления. Дополнительные средства позволяли получать образование все большему количеству людей, что также способствовало развитию экономики.

Быстрое развитие экономики во второй половине XX в. привело к резкому обострению конкуренции в странах с рыночной экономикой. Начался интенсивный поиск методов конкурентной борьбы. В частности, одним из действенных способов оказался *стратегический менеджмент*. Этот способ охватывает организацию и управление бизнесом в перспективе. Стратегии обычно разрабатываются на длительный срок.

Управление стратегией предусматривает выбор миссии, определение стратегии, анализ ее качества и реализацию. Большое внимание при этом уделяется взаимоотношениям работников и предпринимателей, моральному климату в коллективе. Одним из основных положений стратегического менеджмента является необходимость и умение всех сотрудников организации, включая руководство, работать в одной команде. Работая в одной команде и понимая общность интересов, коллектив организации в состоянии выстоять в острой конкурентной борьбе. Это творческое отношение к работе рождается не от любви работника к предпринимателю. Точно так же и предприниматель делится с работниками частью дохода, получаемого организацией, не из-за братских чувств. Все это является необходимостью в складывающихся экономических условиях. И работник, и предприниматель понимают, что без творческого подхода к работе сегодня трудно выстоять в конкурентной борьбе. Идея товарищеских взаимоотношений между всеми сотрудниками организации красной нитью проходит через всю теорию стратегического менеджмента.

Показатели сегодняшней макроэкономики являются чрезвычайно динамичными. Это связано с быстрым развитием науки и техники. Для управления современным производством нужны не только одаренные люди, но и люди высокообразованные. Например, для России это не является проблемой, поскольку таких людей в стране много. В России любят и умеют учиться. Задачей руководства страны является создание условий для качественного образовательного процесса.

В настоящее время в современных развитых странах наблюдается тенденция к сокращению рабочей недели, которое позволит людям развивать общую культуру, безусловно, связанную с корпоративной культурой, и, в частности, повышать свой образовательный уровень. Особенно сокращение рабочего времени необходимо в России. После событий начала 1990-х гг. рабочая неделя в России существенно возросла. Длительность рабочего дня на некоторых предприятиях достигает 12 и более часов.

С развитием макроэкономики развиваются также методы ее изучения. В настоящее время для изучения макроэкономических процессов все больше привлекаются математические методы. Модели, которые широко используются для изучения макроэкономики, являются математическими, так как построить физическую модель реальной экономики невозможно.

Часть I

Основные характеристики макроэкономики

Глава 1

Основные показатели макроэкономики

1.1. Общественное воспроизводство

Общественное воспроизводство предполагает непрерывное возобновление и развитие производства [1—6]. Этот процесс включает в себя воспроизводство валового внутреннего продукта, идущего на потребление и накопление, труда, т.е. рабочей силы, участвующей в процессе производства, а также основных производственных фондов. Общая картина процесса производства, распределения, накопления и потребления представлена на рис. 1.1.

В процессе создания внутреннего национального (валового) продукта участвуют труд, т.е. люди, капитал в виде основных производственных фондов и природные ресурсы. Результатом производственной деятельности является *валовой общественный продукт*, который делится на конечный общественный продукт (валовой национальный продукт) и на промежуточный продукт. *Промежуточный продукт* используется в производстве, а *валовой национальный* (*внутренний*) *продукт*, в свою очередь, делится на потребление, чистый экспорт и инвестиции. Источником инвестиций являются сбережения. Из инвестиций выделяются чистые инвестиции и амортизационные отчисления. И те и другие используются для создания основных производственных фондов. *Амортизационные отчисления* направляются на восстановление устаревших основных фондов, а *чистые капитальные вложения* — на создание новых. Чем больше из валового национального (внутреннего) продукта выделяется чистых инвестиций, тем быстрее идет общественное воспроизводство.

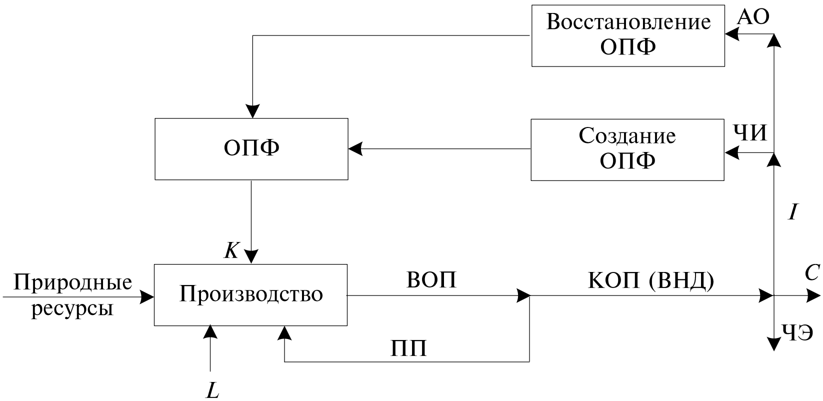


Рис. 1.1. **Схема общественного воспроизводства:**
L — труд; K — капитал; ВОП — валовой общественный продукт; C — потребление; ОПФ — основные производственные фонды; КОП — конечный общественный продукт; ВНД — валовой национальный доход; ПП — промежуточный продукт; I — инвестиции; ЧИ — чистые инвестиции; АО — амортизационные отчисления; ЧЭ — чистый экспорт

В общем случае в отдельных странах возможна регрессия производства. Происходит это в моменты общественных потрясений. Например, в России в 1990-е гг. резко снизилось производство внутреннего валового продукта, что привело к снижению как инвестиций, так и потребления. Восстановление и создание новых основных производственных фондов резко сократилось. Все это привело к обветшанию этих фондов.

1.2. Национальное богатство

Национальное богатство — это совокупность материальных благ, созданных трудом предшествующих и нынешнего поколений и накопленных в стране на определенную дату. Увеличение национального богатства происходит во многом за счет развития науки и техники, а также смены общественных формаций. Производительность труда значительно увеличивается при переходе от рабовладельческого строя к феодальному, а от феодального к капиталистическому. Производительность труда возрастает как за счет появления новых технологий, так и за счет отношения работников к труду.

К национальному богатству относят:

- имущество населения (недвижимость и предметы потребления длительного пользования);
- государственные и частные средства производства;
- стратегические запасы государства;
- запасы готовой продукции;
- используемые в производстве природные ресурсы и разведанные полезные ископаемые;
- общественные материальные и культурные ценности (музеи, библиотеки, памятники архитектуры и искусства и т.д.);
- нематериальные духовные ценности, т.е. достижения в науке, технике, образовании, здравоохранении и культуре.

Структура национального богатства изменяется во времени в пользу доли нематериальных активов. Особенно заметны долгосрочные тенденции в образовании людей, в развитии системы здравоохранения, в появлении новых носителей информации.

Национальное богатство тесно связано с общественным продуктом и отражает материальные условия общественного производства и жизни общества в целом на данный момент времени. Объем общественного продукта характеризует результат процесса производства за определенный период времени, а также источник возмещения потребленного общественного богатства и его увеличения. Таким образом, *общественный продукт* — это объем всех товаров и услуг, произведенных в стране в течение года. К общественному продукту относятся только те товары и услуги, которые принимают товарную форму, имеют рыночную цену или оцениваются по величине издержек на их создание (оборона, милиция, охрана окружающей среды, пожарная охрана и т.д.). Создаваемые домашними хозяйствами для собственного потребления продукты и услуги на рынке не продаются, издержки на их создание учесть невозможно, поэтому они не учитываются при определении общественного продукта.

Для оценки общественного продукта используются различные показатели макроэкономики. Это, прежде всего, валовой общественный продукт (ВОП), который состоит из промежуточного продукта (ПП) и конечного общественного продукта (КОП). Конечный общественный продукт, в свою очередь, состоит из амортизационных отчислений (АО), чистого общественного продукта (ЧОП) и чистого экспорта (ЧЭ).

Национальный доход (НД) — это вновь созданная всеми отраслями стоимость материального производства за год. Он представляет собой стоимость конечного общественного продукта за вычетом амортизационных отчислений, т.е. является денежным эквивалентом чистого общественного продукта.

1.3. Система национального счетоводства

Система национальных счетов (СНС) [4] — это система показателей и классификаций, используемых для описания результатов, полученных за заданный период, на уровне рыночной макроэкономики данной страны. Данные, содержащиеся в СНС, охватывают все стороны экономики. Сюда входят данные обо всех хозяйствующих субъектах страны, экономических операциях, экономических активах и пассивах.

Информация, содержащаяся в Системе национальных счетов, предназначена для органов государственного управления. Она используется для разработки налоговой и бюджетной политики, выработки мероприятий для борьбы с инфляцией, при распределении доходов, для установления ставки рефинансирования и т.д. Эта информация служит также для разработки прогнозов. Другими потребителями информации СНС являются научно-исследовательские учреждения и отдельные ученые, представители бизнеса и предприятий, учебные заведения, а также международные экономические организации.

Создание Системы национального счетоводства явилось естественным продолжением развития науки об экономике. Однако можно считать, что СНС была создана в 1947 г., после опубликования доклада ООН, написанным, в основном, английским экономистом Р. Стоуном (1913—1991), будущим нобелевским лауреатом [4]. В 1951 г. Р. Стоун подготовил доклад «Упрощенная система национальных счетов», в котором были предложены практические рекомендации для составления национальных счетов.

В 1953 г. под руководством Р. Стоуна был разработан первый стандарт ООН, который назывался «Система национальных счетов и вспомогательных таблиц». В 1968 г. был введен второй стандарт ООН. Многие страны мира использовали этот стандарт в своей практической работе. И, наконец, в 1993 г. Статистическая комиссия ООН одобрила новую редакцию Системы национальных счетов, которая позволила использовать смежные разделы экономической статистики, к которым, например, относятся платежный баланс, статистика государственных финансов и др.

Основой Системы национальных счетов является перечень балансовых таблиц, отражающих расходы субъектов хозяйственной деятельности на покупку товаров и услуг и их доходы от результатов хозяйственной деятельности. В СНС используется принцип двойной записи. Поскольку каждая операция предусматривает две стороны, то с одной стороны она записана как ресурс, а с другой — как использование.

Важнейшей классификацией Системы национальных счетов является квалификация по секторам, к которым относятся:

1) нефинансовые организации;
2) финансовые учреждения;
3) государственное управление;
4) домашние хозяйства;
5) некоммерческие организации, обслуживающие домашние хозяйства.

Нефинансовые организации производят нефинансовые товары и услуги для продажи их на рынке. За счет реализации произведенных товаров и услуг формируются их основные доходы. Сюда входят частные и государственные корпорации и предприятия, совместные предприятия и предприятия, находящиеся под контролем иностранного капитала.

Финансовые учреждения состоят из единиц, занятых финансовыми операциями на коммерческой основе. К ним относятся банки, страховые компании и другие финансовые учреждения, которые являются посредниками между инвесторами и потребителями капитала.

Государственное управление включает бюджетные государственные учреждения, которые перераспределяют доходы и богатства. Государственные учреждения финансируют свои издержки за счет налогов и доходов, полученных от государственной собственности.

Домашние хозяйства охватывают население или группы населения как потребителей товаров и услуг. Сюда также относятся мелкие предприятия, владельцами которых выступают домашние хозяйства (мелкие фермы, магазины, мастерские и т.д.). Сюда же включаются люди свободных профессий и собственники жилья.

Некоммерческие организации, обслуживающие домашние хозяйства, состоят из единиц, занятых услугами нерыночного характера. Сюда входят общественные, религиозные, политические и другие организации. Эти организации финансируют свои издержки за счет взносов, пожертвований, эксплуатации собственности и т.д.

К числу сводных счетов внутренней экономики относятся счета: товаров и услуг, производства, образования доходов, использования располагаемого дохода, операций с капиталом.

Макет таблицы «Счета товаров и услуг» представлен в табл. 1.1 (данные по годам приводятся в текущих ценах).

Таблица 1.1

Ресурсы				*Использование*			
	Год	*Год*	*Год*		*Год*	*Год*	*Год*
Валовой выпуск Импорт Налоги Субсидии				Промежуточное потребление Расходы на конечное потребление Валовое накопление Экспорт			
Всего				Всего			

Если в строках «Всего» наблюдаются расхождения, то необходимо ввести строку «Статистические расхождения».

Центральным показателем Системы национальных счетов является валовой внутренний продукт. К показателям СНС также относят национальный доход, располагаемый доход и другие показатели доходов.

Резиденты — институциональные единицы (предприятия, учреждения, домашние хозяйства и т.д.), зарегистрированные или постоянно проживающие в данной стране. На резидента в полной мере распространяется режим национального налогообложения и законодательного регулирования.

Институциональная единица — хозяйственная единица, которая ведет полный набор бухгалтерских счетов и является юридическим лицом.

1.4. Связь между основными показателями макроэкономики

Связь между основными показателями макроэкономики [1—6], используемыми для ее анализа, представлена в табл. 1.2.

Таблица 1.2

КОП = ВОП − ПП Конечный общественный продукт = = Валовой общественный продукт − − Промежуточный продукт	НД = КОП − АО Национальный доход (Чистый общественный продукт) = Конечный общественный продукт − − Амортизационные отчисления
ВНД = ВВП + СДГ Валовой национальный доход = = Валовой внутренний продукт + + Сальдо доходов из-за границы	НД = ВНД − АО Национальный доход = = Валовой национальный доход − − Амортизационные отчисления
ЧВП = ВВП − АО Чистый внутренний продукт = = Валовой внутренний продукт − − Амортизационные отчисления	НД = ЧВП + СДГ Национальный доход = = Чистый внутренний продукт + + Сальдо доходов из-за границы

Валовой национальный доход [4] — обобщающий экономический показатель, соответствующий ценности всех произведенных в течение года товаров и услуг, предназначенных для конечного потребителя, с помощью факторов производства, принадлежащих данной стране. В значение ВНД не включаются цены на продукты, произведенные в предшествующие годы, но проданные в отчетном году. Однако вознаграждения посредников, продавших эти товары в отчетном году, включаются в ВНД, так как услуги этих посредников являются составной частью объема производства текущего года.

Многие товары и услуги продаются несколько раз, прежде чем они войдут в конечный продукт. Для правильного расчета ВНД необходимо учесть все товары и услуги, произведенные в течение года, только один раз. Это позволяет избежать двойного счета.

Валовой национальный доход вычисляется в текущих рыночных ценах. Однако для сравнения показателей за различные годы используются цены базового года, относительно цен которого проводят перерасчет показателей за другие годы. Это позволяет избежать ошибок, связанных с инфляцией.

Валовой внутренний продукт — обобщающий экономический показатель, соответствующий ценности всех произведенных резидентами в течение года товаров и услуг, предназначенных для конечного потребителя, с помощью факторов производства, находящихся внутри данной страны.

Валовой национальный доход и валовой внутренний продукт отличаются друг от друга на сальдо доходов из-за границы (СДГ).

Разность между валовым внутренним продуктом и амортизационными отчислениями дает чистый внутренний продукт (ЧВП).

ООН рекомендует использовать в качестве основного показателя для составления системы национальных счетов валовой внутренний продукт. Многие страны, включая Россию, придерживаются этой рекомендации.

1.5. Методы расчета ВВП

Валовой внутренний продукт (ВВП) рассчитывают тремя методами [4]:

1) производственным — как сумма валовой добавленной стоимости;

2) конечного использования — как сумма компонентов конечного использования;

3) распределительным — как сумма первичных доходов.

В некоторых странах при расчете ВВП используют сразу три метода. Для уточнения величины ВВП результаты расчета по каждому методу используются для нахождения среднего арифметического. В других странах используют два метода. Некоторые страны отдают предпочтение только одному.

При использовании ***производственного метода*** для расчета валового внутреннего продукта суммируют валовые добавленные стоимости с учетом косвенных налогов всех производств резидентов, сгруппированных по отраслям или секторам.

Валовая добавленная стоимость — это стоимость всех произведенных товаров и услуг за вычетом товаров и услуг, полностью потребляемых в процессе производства (промежуточный продукт — ПП).

При расчете ВВП ***методом конечного использования*** суммируют расходы на конечное потребление, валовое накопление, чистый экспорт товаров и услуг.

Расходы на конечное потребление включают расходы: домашних хозяйств-резидентов на товары и услуги, органов государственного управления, некоммерческих организаций, обслуживающих домашние хозяйства.

Валовое накопление включает чистое приобретение товаров и услуг, произведенных в текущем периоде, но не потребленных в нем. В валовое накопление входят валовое накопление основного капитала, изменение оборотных средств, включая запасы, чистое приобретение ценностей. К таким ценностям относятся ювелирные изделия, картины, антиквариат и т.д.

Распределительный метод включает в себя амортизацию, заработную плату, налоги, прибыль.

Поскольку валовой внутренний продукт рассчитывается в текущих ценах, то это представляет определенные трудности при сравнении этого показателя за различные годы из-за инфляции. Поэтому вводят дефлятор ВВП. Валовой внутренний продукт, рассчитанный в текущих ценах для конкретного года, называется номинальным ВВП. Для расчета реального ВВП делят значение номинального ВВП на дефлятор ВВП, т.е.

$$\textit{Реальный ВВП} = \frac{\textit{Номинальный ВВП}}{\textit{Дефлятор ВВП}}.$$

При вычислении дефлятора ВВП можно использовать, например, формулу Пааше. При этом следует учитывать изменение цен не только на товары и услуги рыночной корзины, но и изменение номинальной оплаты труда, прироста цен основных фондов за счет инфляции, номинальной массы чистых налогов и т.д.

1.6. Личный и располагаемый доходы

Личный доход — это заработанный доход. Часть заработанного дохода, к которой относятся взносы на социальное страхование, налоги на прибыль предприятий, нераспределенная прибыль, население непосредственно не получает. Другая часть личного дохода поступает населению в виде трансфертных платежей. Размеры этих платежей определяются действующими законами. *Трансфертные платежи* — это расходы государства, за которые оно не получает товаров и услуг. Эти платежи предполагают перераспределение доходов между членами общества. К таким платежам относятся пособия по безработице, пенсии, стипендии и т.д.

Личный доход вычисляется путем вычитания из национального дохода суммы всех невыплаченных населению доходов и прибавления государственных трансфертных платежей, выплачиваемых отдельным гражданам в соответствии с существующим законом.

Располагаемый доход отличается от личного дохода общей суммой прямых налогов, которые выплачивает население из личного дохода. *Располагаемый доход* — это та часть личного дохода, которую население может использовать по своему усмотрению. К налогам, которые население выплачивает из личного дохода, относят подоходный налог, налог на имущество, налог на наследство, налог на прибыль в некорпоративном секторе экономики.

1.7. Качество и уровень жизни

Благосостояние членов общества оценивается качественными (качество жизни) и количественными (уровень жизни) характеристиками.

Уровень жизни — уровень удовлетворения физических, духовных и социальных потребностей людей материальными благами. Человек имеет право на такой уровень жизни, который необходим для поддержания здоровья его самого и его семьи, а также право на обеспечение в случае безработицы, инвалидности, вдовства или иного случая утраты средств к существованию по независящим от этого человека обстоятельствам.

Уровень жизни оценивается путем подсчета потребления в денежных или натуральных единицах одежды, питания, жилища, различного рода услуг. При оценке уровня жизни используется ряд показателей:

- рождаемость, смертность и другие демографические характеристики;
- потребление продовольственных товаров;

- санитарно-гигиенические условия жизни;
- жилищные условия;
- образование и культура;
- условия труда и занятость;
- доходы и расходы населения;
- стоимость жизни и потребительские цены;
- транспортные средства;
- организация отдыха;
- социальное обеспечение;
- свобода человека.

В качестве других показателей уровня жизни можно назвать значения на душу населения валового внутреннего дохода, национального дохода и др.

В тех случаях, когда оценить показатель количественно не представляется возможным или когда такая оценка требует существенных затрат, для оценок благосостояния используют *качество жизни*. Этим методом оценивается, например, уровень комфорта в труде и в быту, качество питания, одежды, жилья, экологического состояния среды обитания человека, образования, работы социальных институтов и т.д. Качество жизни характеризуется понятиями «высокое», «среднее», «удовлетворительное», «низкое», «неудовлетворительное».

1.8. Конечное потребление

Потребность — это желание иметь какое-либо благо, подкрепленное суммой денег, необходимых для его покупки. Спрос всегда основывается на способности и готовности платить. *Потребление* — это получение потребителями удовольствия от использования продукта. Конечное потребление зависит от доходов населения, которые делятся на потребление и накопления.

Непроизводственное потребление включает в себя личное потребление населения, потребление в учреждениях и предприятиях культурно-бытового обслуживания населения, потребление в сфере управления, обороны и в научных учреждениях.

Население потребляет материальные блага и услуги. Услуги могут иметь и не иметь материального предмета труда. К непроизводственным услугам, не имеющим материального предмета труда, относятся результаты деятельности учебных и медицинских заведений, учреждений культуры и искусства и др. Производственными услугами, имеющими материальные предмета труда, являются, например, услуги ателье по пошиву одежды, мастерских, прачечных и т.д.

Для оценки минимальных объемов потребления материальных благ и услуг человеком установлены несколько понятий.

Прожиточный минимум — минимальная сумма денежных средств, достаточная для удовлетворения физиологических и социально-культурных потребностей человека. Он определяется в расчете на «среднестатистического» жителя и для различных социально-демографических групп населения. По отдельным возрастным группам прожиточный минимум сильно различается, например, мужчине надо вдвое больше, чем ребенку. Если потребление ниже прожиточного минимума, то люди живут за чертой бедности.

Прожиточный физиологический минимум — минимальная сумма денежных средств, достаточная для поддержания физического состояния в течение определенного времени. Сюда входят расходы на питание, самые необходимые средства санитарии и гигиены, лекарства, коммунальные услуги и другие обязательные платежи.

Уровень бедности — уровень, при котором средств не хватает для обеспечения прожиточного минимума. Одним из средств борьбы с бедностью является государственная политика перераспределения доходов.

В мировой практике различают д в е формы бедности:

1) абсолютная, когда отсутствует доход, необходимый для обеспечения минимальных жизненных потребностей личности или семьи;

2) относительная, когда доход не превышает 40—60% среднего дохода по стране.

В начале XX в. итальянский экономист В. Парето (1848—1923) установил, что доходы и богатства отдельных семей имеют существенное неравенство и в каждой стране имеют приблизительно одни и те же пропорции, равные 80:20.

Обычно для оценки доходов населения данной страны все это население разбивается на пять равных групп по 20% в каждой. Затем оценивают величину дохода каждой из этих групп.

В США в конце 1990-х гг. 20% самых богатых семей принадлежало 85% всех богатств страны [6], что не сильно отличается от соотношения Парето. Доходы в США также распределены неравномерно. На указанный период 20% богатых семей имеют 43% всех доходов, а 80% населения — 57% этих доходов. Самые бедные 20% населения имеют только 5% общего дохода.

В России также наблюдается существенная дифференциация богатства и доходов. В 2001 г. в России 20% богатых имели 47% общего дохода, а самые бедные 20% населения имели только 5,9%. При этом более 20% населения имели доходы менее прожиточного минимума. На рис. 1.2 представлена диаграмма, показывающая динамику изменения доходов в двух 20%-ных группах населения. Значение части доходов (в процентах) самой бедной группы представлено белыми столбиками, а самой богатой — черными. Значение децильного коэффициента в России превышает 15. (Децильным коэффициентом называют отношение среднего дохода самой богатой 10%-ной группы населения к среднему доходу самой бедной 10%-й группы населения.)

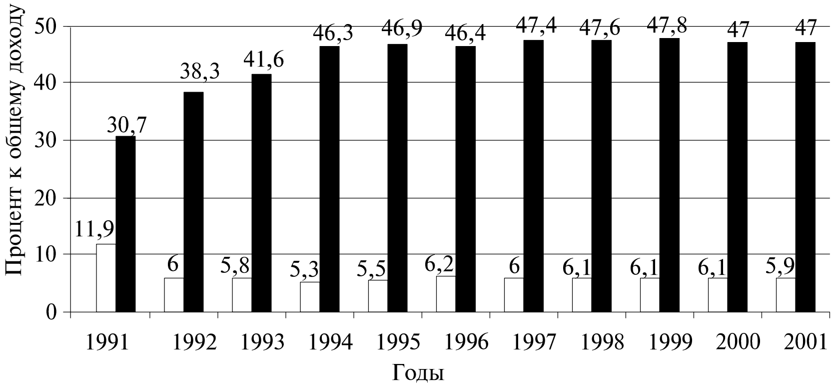


Рис. 1.2. **Распределение доходов между самой бедной и самой богатой частью населения по годам:**
□ — первая 20%-ная группа; ■ — вторая 20%-ная группа

1.9. Коэффициент концентрации Джини

Наиболее распространенным методом определения степени неравенства является метод накопления частот. Результат накопления, представленный в виде графика, называют *кривой Лоренца*. Вид этой кривой представлен на рис. 1.3.

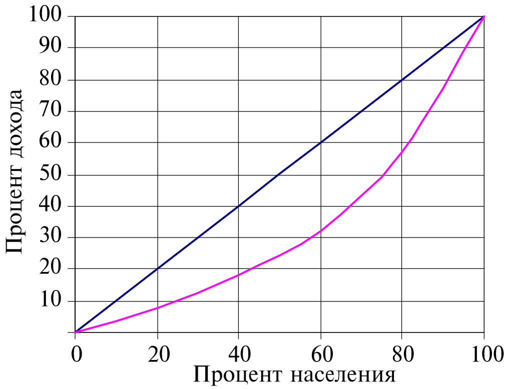


Рис. 1.3. **Кривая Лоренца**

Абсолютное равенство распределения доходов представлено диагональю. Например, 20% всего дохода получают 20% всего населения, а 60% всего дохода получают 60% всего населения и т.д. Площадь, заключенная между диагональю и кривой Лоренца, обозначает степень неравенства доходов. Отношение этой площади к площади равнобедренного прямоугольного треугольника, образованного диагональю и двумя сторонами квадрата, является коэффициентом концентрации Джини, названного по имени итальянского экономиста К. Джини. Понятно, что этот коэффициент всегда заключен между нулем и единицей. Нулю этот коэффициент равен, когда кривая Лоренца сливается с диагональю, а единице — когда кривая Лоренца сливается с катетами треугольника. На практике коэффициент Джини лежит в интервале от 0,27 до 0,57. В развитых капиталистических странах в последнее время наблюдается снижение этого коэффициента. Например, за последние полвека в США коэффициент Джини снизился с 0,38 до 0,34, а в Великобритании — с 0,39 до 0, 35 [6].

В России коэффициент Джини существенно возрос по сравнению с 1991 г. Динамика изменения коэффициента Джини в России представлена на рис. 1.4.

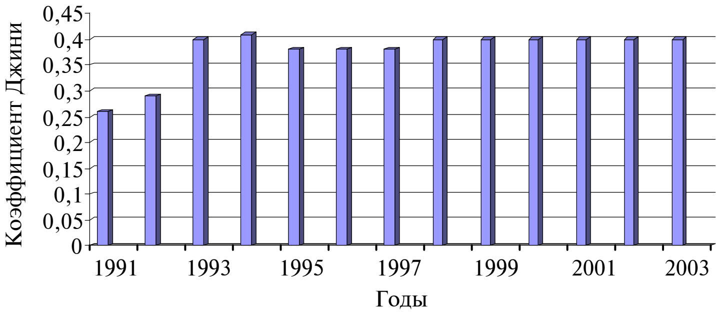


Рис. 1.4. **Динамика изменения коэффициента Джини**

Начальный этап становления рыночного хозяйства в постсоциалистических государствах характерен во многом незаконным формированием и накоплением капитала. Поэтому в этих странах, где доход до 1991 г. зависел, в основном, от трудовой деятельности людей, появилось негативное отношение населения к огромным состояниям, нажитым за короткий срок и приближающимся к 1 трлн рублей. Формирование слоя собственников в постсоциалистических государствах, которые используют этот капитал для получения баснословных доходов, приведет к еще большему расслоению общества. Все это усугубляет бедность другой части общества и нагнетает социальную напряженность. Для устранения этих явлений требуется активное вмешательство государства, направленное на справедливое перераспределение доходов.

1.10. Отраслевая структура национальной экономики

Любая национальная экономика состоит из отраслей. *Отрасль* — группа родственных видов экономической деятельности, сосредоточенная вокруг производимых ею товаров и услуг. Не всегда можно указать на четкие границы отрасли. Например, производство радиоприемников связано с поставкой электроники, монтажом и настройкой. Это производство можно выделить в отдельную отрасль. Однако во многом используются та же электроника, то же оборудование для регулировки и настройки телевизоров. Поэтому эти два производства и другие, сходные с ними, можно объединить в одну отрасль по производству радиоаппаратуры.

Отраслевая классификация группирует товары на основе материалов и комплектующих, а также производственных процессов. Например, мужская и женская обувь изготавливается из одних материалов на схожем оборудовании. Однако при такой классификации следует учитывать отношение покупателей к этим товарам, т.е. учитывать рынок сбыта. Мужская и женская обувь не рассматривается покупателями как заменители. Поэтому она должна быть определена как предметы сделок на разных рынках.

Обычно отраслевая классификация начинается с определенного широкого спектра родственных видов деятельности. Затем каждая группа подразделяется на более мелкие группы. Например, отрасль по производству электроэнергии можно разбить на атомные электростанции, гидроэлектростанции и тепловые электростанции.

Макроэкономические классификации используются в целях макроэкономического анализа и планирования.

Помимо рассмотренных принципов деления экономика делится также на реальный и финансовый секторы. В *реальном секторе* производятся товары и услуги (помимо финансовых), направленные на удовлетворение потребностей людей и отраслей. *Финансовый сектор* связан с деятельностью финансовых институтов. Эти институты оказывают услуги по финансированию реального сектора и друг друга. Они действуют в качестве посредников в процессе превращения сбережений в инвестиции.

1.11. Межотраслевой баланс

Модели межотраслевого баланса отражают взаимосвязи по производству, потреблению и накоплению общественного продукта между отраслями народного хозяйства. При этом отрасль рассматривается, с одной стороны, как потребитель продукции других отраслей, а с другой — как производитель продукции для собственных нужд, нужд других отраслей и секторов экономики. Во многих странах модели межотраслевого баланса разрабатываются в системах национальных счетов.

Идея межотраслевого анализа народного хозяйства принадлежит русскому ученому, практически всю жизнь проработавшему в США, В.В. Леонтьеву (1906—1999) [3]. Свою работу о первом балансе народного хозяйства СССР Леонтьев опубликовал в 1925 г. В это время он учился в Берлинском университете, куда поступил для подготовки докторской диссертации после окончания Петербургского университета. В цитируемой работе В. Леонтьев использовал предложенную советскими статистиками таблицу межотраслевых связей. С тех пор ученый проводил интенсивную работу по построению таблиц «затраты-выпуск» и их анализу. Первую статью по этому методу В. Леонтьев опубликовал в 1936 г. Она называлась «Количественные соотношения «затраты-выпуск» в экономической системе Соединенных Штатов». В 1941 г. В. Леонтьев выпустил книгу «Структура американской экономики, 1919—1929». В.В. Леонтьев — экономист-теоретик, вся теория которого построена на практических результатах.

В общем случае идеи межотраслевого анализа народного хозяйства, предложенные В. Леонтьевым, могут быть применимы к анализу народного хозяйства страны, всей мировой экономики, регионов и предприятий. При этом технологическая структура системы может быть представлена матрицей коэффициентов «затраты-выпуск».

1.12. Статический межотраслевой баланс

Таблицы межотраслевого баланса описывают потоки товаров и услуг между всеми секторами народного хозяйства за заданный период времени. В табл. 1.3 приведен межотраслевой баланс трехсекторальной экономической системы [3].

Таблица 1.3

Секторы-производители	*Секторы-потребители*			
	Сектор 1. Сельское хозяйство	*Сектор 2. Промышленность*	*Сектор 3. Домашнее хозяйство*	*Общий выпуск*
Сектор 1. Сельское хозяйство	25 (x_{11})	20 (x_{12})	55 (x_{13})	100 $\left(\sum_{j=1}^{3} x_{1j}\right)$
Сектор 2. Промышленность	14 (x_{21})	6 (x_{22})	30 (x_{23})	50 $\left(\sum_{j=1}^{3} x_{2j}\right)$
Сектор 3. Домашнее хозяйство	80 (x_{31})	180 (x_{32})	40 (x_{33})	300 $\left(\sum_{j=1}^{3} x_{3j}\right)$

Секторами рассматриваемой экономики являются сельское хозяйство, промышленность и домашнее хозяйство. Общий выпуск сельского хозяйства за рассматриваемый период составил 100 сельскохозяйственных единиц (например, бушелей зерна), промышленности — 50 промышленных единиц (например, ярдов ткани), домашнего хозяйства — 300 человеко-лет труда. Из 100 произведенных сельскохозяйственных единиц 25 потребляет само сельское хозяйство, 20 — промышленность и 55 — домашний сектор. Соответственно из 50 произведенных промышленных единиц 14 потребляется сельским хозяйством, 6 — самой промышленностью и 30 — домашними хозяйствами. Из 300 человеко-лет домашнее хозяйство потратило 80 человеко-лет для работы в сельском хозяйстве, 180 человеко-лет — для работы в промышленности и 40 человеко-лет — для работы на себя.

Из сказанного следует, что числа, представленные в выделенной квадратной таблице, характеризуют межотраслевые потоки. В общем случае эти потоки обозначаются буквой x с двумя индексами. Первый индекс обозначает номер строки выделенной таблицы, второй — номер столбца.

Таким образом, для производства 100 ед. сельскохозяйственной продукции сельское хозяйство потребляет 25 ед. собственной продукции, 14 ед. промышленной продукции и 80 человеко-лет труда домашнего хозяйства. Для производства 50 промышленных единиц промышленность потребляет 20 ед. сельскохозяйственной продукции, 6 ед. собственной и 180 человеко-лет труда. Домашнее хозяйство за отработанные 300 человеко-лет получает доход, который расходует для оплаты 55 сельскохозяйственных единиц, 30 промышленных единиц, а также 40 человеко-лет собственного труда.

На практике большинство таблиц составляется не в физических единицах, а в стоимостных, т.е. в денежных. Для перехода к денежным единицам следует физические показатели умножить на цену единицы каждого продукта. Пусть для данных табл. 1.3 цена 1 ед. сельскохозяйственной продукции равна 2 ден. ед. (например, 2 млрд руб.), цена 1 промышленной единицы продукции — 5 ден. ед., а 1 человеко-год труда — 1 ден. ед. Тогда табл. 1.3 можно представить в виде, показанным в табл. 1.4.

По сравнению с табл. 1.3 в табл. 1.4 появилась еще одна строка, названная «Общий выпуск». Это связано с тем, что в табл. 1.4 все данные имеют одну размерность. А это значит, что сложение можно проводить не только по строкам, но и по столбцам.

Таблица 1.4

Секторы-производители	*Секторы-потребители*			
	Сектор 1. Сельское хозяйство	*Сектор 2. Промышленность*	*Сектор 3. Домашнее хозяйство*	*Общий выпуск*
Сектор 1. Сельское хозяйство	50	40	110	200
Сектор 2. Промышленность	70	30	150	250
Сектор 3. Домашнее хозяйство	80	180	40	300
Общий выпуск	200	250	300	

Таблицу межотраслевого баланса, представленную в стоимостных показателях, можно рассматривать как систему национальных счетов. 300 ден. ед., потребляемых домашним хозяйством, являются конечным общественным продуктом. Чтобы получить значение национального дохода, из конечного общественного продукта надо вычесть амортизационные отчисления.

В общем случае количество секторов в народном хозяйстве может достигать нескольких сотен и даже тысяч. Поэтому объем реальных таблиц является более значительным по сравнению с рассмотренными таблицами. Обычно количество производственных секторов обозначается буквой n. Потребляющий сектор, или сектор конечного спроса, имеет номер $n+1$. В наших таблицах он представлен как сектор домашних хозяйств.

Физический выпуск сектора под номером i обозначают x_i, а количество продукции сектора i, используемое в качестве затрат сектором под номером j, обозначается как x_{ij}. Величины

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j} \qquad \textbf{(1.1)}$$

называются *коэффициентами прямых материальных затрат*. Квадратная таблица из коэффициентов прямых материальных затрат называется *структурной матрицей*. Коэффициенты прямых материальных затрат характеризуют количество продукции i-й отрасли, использованной при производстве единицы продукции j-й отрасли. Структурная матрица для табл. 1.3 имеет вид, представленный в табл. 1.5.

Таблица 1.5

Секторы-производители	*Секторы-потребители*			
	Сектор 1. Сельское хозяйство	*Сектор 2. Промышленность*	*Сектор 3. Домашнее хозяйство*	*Общий выпуск*
Сектор 1. Сельское хозяйство	0,25	0,4	0,183	100
Сектор 2. Промышленность	0,14	0,12	0,1	50
Сектор 3. Домашнее хозяйство	0,8	3,6	0,133	300

Коэффициенты прямых материальных затрат a_{ij} являются в общем случае размерными величинами. Если индексы этих коэффициентов одинаковы, т.е. $i = j$, то размерность числителя и знаменателя дроби **(1.1)** одинакова и коэффициент a_{jj} является безразмерной величиной. Значение коэффициента a_{jj} всегда меньше единицы. Если $i \neq j$, то коэффициенты прямых материальных затрат имеют размерность. Например, коэффициент $a_{12} = 0,4$ табл. 1.5 имеет размерность $\dfrac{\textit{Сельскохозяйственная единица}}{\textit{Промышленная единица}}$. Для примера Леонтьева эту размерность можно записать в виде $\dfrac{\textit{Бушель зерна}}{\textit{Ярд ткани}}$.

В общем случае для экономики с количеством секторов, равным $n+1$, где $(n+1)$-й сектор является потребляющим (сектор домашних хозяйств), баланс между совокупным выпуском и суммарными затратами продукции каждого сектора может быть представлен в виде системы уравнений

$$\left.\begin{array}{l} (x_1 - x_{11}) - x_{12} - \dots - x_{1n} = y_1, \\ -x_{21} + (x_2 - x_{22}) - \dots - x_{2n} = y_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -x_{n1} - x_{n2} - \dots + (x_n - x_{nn}) = y_n. \end{array}\right\} \qquad (1.2)$$

Здесь $y_1, y_2, \dots, y_n$ — товары и услуги, потребляемые домашними хозяйствами, учреждениями и предприятиями культурно-бытового обслуживания населения, в сфере управления, обороны и в научных учреждениях. Совокупный продукт потребляющих секторов рассматривается в качестве известной величины в правой части представленной системы уравнений.

При моделировании экономических процессов широко используются такие понятия, как экзогенная и эндогенная переменные.

Экзогенная (*внешняя*) *переменная* — переменная, которая влияет на взаимосвязи, описываемые в экономической модели, но сама не подвергается воздействию с их стороны.

Эндогенная (*внутренняя*) *переменная* — переменная, которая влияет на взаимосвязи, описываемые в экономической модели, и сама подвергается воздействию с их стороны.

Система межотраслевых связей считается *открытой*, когда существуют экзогенные секторы. Если домашние хозяйства считаются сектором конечного спроса, т.е. экзогенными, то система межотраслевых связей считается открытой. В том случае, когда все секторы рассматриваются как внутренние, или эндогенные, система межотраслевых связей называется *замкнутой*.

Если в систему уравнений **(1.2)** вместо x_{ij} подставить значение физического выпуска секторов x_i и коэффициенты прямых материальных затрат a_{ij}, определяемые формулой **(1.1)**, то получим систему уравнений

$$\left.\begin{array}{l} (1-a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n = y_1, \\ -a_{21}x_1 + (1-a_{22})x_2 - \ldots - a_{2n}x_n = y_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \ldots + (1-a_{nn})x_n = y_n. \end{array}\right\} \qquad \textbf{(1.3)}$$

Линейная система уравнений **(1.3)** позволяет по заданному выпуску $y_1, y_2, \ldots, y_n$, потребляемому домашним хозяйством, и по заданным коэффициентам прямых материальных затрат a_{ij} определить необходимый физический выпуск секторов x_i.

Если ввести матрицу постоянных коэффициентов Λ, входящих в систему **(1.3)**, вектор-столбец продукции X и вектор-столбец продукции конечного использования Y по формулам

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & \ldots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 1-a_{22} & \ldots & -a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \ldots & 1-a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

то систему уравнений **(1.3)** можно представить в матричной форме

$$\Lambda \cdot X = Y. \tag{1.4}$$

Решение этого уравнение имеет вид:

$$X = \Lambda^{-1} \cdot Y, \tag{1.5}$$

где Λ^{-1} — матрица, обратная матрице Λ.

Обозначим $\Lambda^{-1} = B$. Матрица $B = \left(b_{ij}\right)$ называется *матрицей коэффициентов полных затрат.*

Система решений **(1.5)** системы уравнений **(1.4)** выглядит следующим образом

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \ldots + b_{1n}y_n, \\ x_2 = b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \ldots + b_{2n}y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = b_{n1}y_2 + b_{n2}y_2 + \ldots + b_{nn}y_n. \end{array}\right\} \tag{1.6}$$

Здесь постоянные коэффициенты заданы матрицей

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Физический выпуск сектора под номером $n+1$, являющегося домашним хозяйством, обозначают x_{n+1}. Количество труда сектора $n+1$, используемое сектором под номером j, обозначается как $x_{n+1,j} = y_j$. Это количество труда, выраженное через коэффициент прямых материальных затрат $a_{n+1,j} = \dfrac{x_{n+1,j}}{x_j}$, определяется соотношением

$$y_j = a_{n+1,j} \cdot x_j.$$

Поскольку совокупный продукт домашнего хозяйства в системе уравнений **(1.4)** является величиной известной, то его значение может быть вычислено по формуле

$$x_{n+1} = y_1 + y_2 + \ldots + y_n + y_{n+1} = a_{n+1,1}x_1 + a_{n+1,2}x_2 + \ldots + a_{n+1,n}x_n + y_{n+1},$$

где $a_{n+1,1}, a_{n+1,2}, ..., a_{n+1,n}$ — коэффициенты прямых материальных затрат, характеризующие затраты соответствующих секторов на единицу труда домашнего хозяйства; y_{n+1} — величина труда домашнего хозяйства, используемая для собственных нужд.

Экспорт и импорт товаров, рассматриваемых в табл. 1.3 трехсекторальной экономической системы, нарушает баланс экономики. Пусть сельскохозяйственная продукция импортируется в страну в объеме 20 сельскохозяйственных единиц. В табл. 1.6 это значение приведено со знаком «–». Промышленная продукция в размере восьми промышленных единиц экспортируется из страны.

Таблица 1.6

Секторы-производители	*Секторы-потребители*					*Общий выпуск*
			Конечный спрос			
	Сектор 1. Сельское хозяйство	*Сектор 2. Промышленность*	*Сектор 3. Домашнее хозяйство*	*Экспорт (+) или импорт (−)*	*Общий конечный спрос*	
Сектор 1. Сельское хозяйство			55	−20	35	
Сектор 2. Промышленность			30	+8	38	
Сектор 3. Домашнее хозяйство			40		40	

Домашние хозяйства потребляют то же количество продуктов, что и ранее (графа «Сектор 3»). Общий конечный спрос определяется как сумма данных граф «Сектор 3» и «Экспорт или импорт». Теперь, используя общий конечный спрос, надо определить новый баланс.

Система уравнений **(1.3)** для рассматриваемого примера имеет вид:

$$\begin{cases} (1-0,25)x_1 - 0,4x_2 = 35, \\ -0,14x_1 + (1-0,12)x_2 = 38. \end{cases}$$

Матрицу Λ можно записать в виде:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0,75 & -0,4 \\ -0,14 & 0,88 \end{pmatrix}.$$

Обратную ей матрицу Λ^{-1} можно найти, например, используя функции Excel,

$$\Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} 1,456954 & 0,662252 \\ 0,231788 & 1,241722 \end{pmatrix}.$$

Для определения общих выпусков сельскохозяйственного и промышленного секторов используется формула **(1.5)**. Произведение матриц также можно найти, используя функции Excel,

$$X = \Lambda^{-1} Y = \begin{pmatrix} 1,456954 & 0,662252 \\ 0,231788 & 1,241722 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 35 \\ 38 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 76,159 \\ 55,298 \end{pmatrix}.$$

Данные по общим выпускам сельскохозяйственного и промышленного секторов занесем в табл. 1.7, которая является продолжением табл. 1.6. Совокупный спрос на труд остается неизменным, поскольку затраты труда на производство импортируемой сельскохозяйственной продукции равны затратам труда на производство экспортируемой промышленной продукции.

Таблица 1.7

Секторы-производители	*Секторы-потребители*					*Общий выпуск*
	Сектор 1. Сельское хозяйство	*Сектор 2. Промышленность*	*Конечный спрос*			
			Сектор 3. Домашнее хозяйство	*Экспорт (+) или импорт (−)*	*Общий конечный спрос*	
Сектор 1. Сельское хозяйство	19,04	22,119	55	−20	35	76,159
Сектор 2. Промышленность	10,662	6,636	30	+8	38	55,298
Сектор 3. Домашнее хозяйство	60,927	199,073	40	—	40	300

Для определения количества продукции сектора i, используемой в качестве затрат сектором под номером j, применим формулу **(1.1)**, переписав ее в виде:

$$x_{ij} = a_{ij} x_j.$$

Например, для сельского хозяйства

$$x_{11} = 0,25 \cdot 76,159 = 19,04 \text{ , а } x_{12} = 0,4 \cdot 55,298 = 22,119 \text{ .}$$

1.13. Цены в статической системе межотраслевых связей

Цена единицы выпуска сектора находится из решения системы уравнений, составленной из следующих соображений. Используя данные матрицы межотраслевого баланса, например, матрицы, представленной в табл. 1.3, составляют уравнения для цены единицы продукта j. Как следует из табл. 1.3, для производства 100 ед. сельскохозяйственной продукции сельское хозяйство потребляет 25 ед. собственной продукции, 14 ед. промышленной продукции и 80 человеко-лет труда домашнего хозяйства. Просуммировав данные первого столбца, умноженные на соответствующие цены, получим первое уравнение системы:

$$25p_1 + 14p_2 + 80p_3 = 100p_1,$$

где p_1, p_2 и p_3 — цена 1 ед. продукции сельского хозяйства, промышленности и труда соответственно.

Это уравнение можно переписать в виде:

$$(100-25)\,p_1 - 14p_2 = 80p_3.$$

Правая часть этого уравнения является стоимостью сельскохозяйственной продукции, которую потребляют домашние хозяйства. Домашние хозяйства рассматриваются как потребляющие, т.е. они являются сектором конечного спроса, или экзогенным сектором.

В общем случае уравнение для первого сектора можно записать в виде:

$$(x_1 - x_{11})\,p_1 - x_{21}p_2 - \ldots - x_{n1}p_n = x_{n+1,1}p_{n+1}.$$

Используя формулу для коэффициента прямых материальных затрат **(1.1)**, последнее уравнение можно переписать в виде:

$$x_1(1-a_{11})\,p_1 - x_1a_{21}p_2 - \ldots - x_1a_{n1}p_n = x_1a_{n+1,1}p_{n+1}.$$

Размерностью каждого слагаемого в этом выражении является денежная единица. После сокращения на x_1 размерность каждого слагаемого будет составлять:

$$\frac{\textit{Денежная единица}}{\textit{Единица продукта первого сектора}},$$

а уравнение примет вид:

$$(1-a_{11})\,p_1 - a_{21}p_2 - \ldots - a_{n1}p_n = a_{n+1,1}p_{n+1}.$$

Обычно при написании таких уравнений используют обозначение

$$v_1 = a_{n+1,1} p_{n+1},$$

где v_1 — платежи 1-го сектора, выплачиваемые всем потребляющим (экзогенным) секторам, или секторам конечного спроса, в расчете на единицу его продукции. Сюда входит заработная плата, предпринимательская прибыль и проценты на капитал, выплаченные домашним хозяйствам, налоги.

Окончательно первое уравнение системы для определения цен на продукты имеет вид:

$$(1 - a_{11}) p_1 - a_{21} p_2 - \ldots - a_{n1} p_n = v_1.$$

Таким образом, система уравнений для определения цен имеет вид:

$$\left.\begin{array}{lllll} (1-a_{11})p_1 & - \; a_{21}p_2 & - \ldots - & a_{n1}p_n & = v_1, \\ -a_{12}p_1 & + \; (1-a_{22})p_2 & - \ldots - & a_{n2}p_n & = v_2, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \\ -a_{1n}p_1 & - \; a_{2n}p_2 & - \ldots + & (1-a_{nn})p_n & = v_n. \end{array}\right\} \qquad \textbf{(1.7)}$$

Если сравнить матрицу постоянных коэффициентов при неизвестных системы **(1.7)** и системы **(1.3)**, то можно увидеть, что матрица системы **(1.7)** является транспонированной матрице системы **(1.3)**. Эта транспонированная матрица, в которой столбцы поменялись местами со строками, имеет вид:

$$\Lambda^T = \begin{pmatrix} 1-a_{11} & -a_{21} & \ldots & -a_{n1} \\ -a_{12} & 1-a_{22} & \ldots & -a_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \ldots & 1-a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Если ввести матрицу вектор-столбец цены продукции P и вектор-столбец платежей эндогенных секторов, выплачиваемых всем потребляющим (экзогенным) секторам, или секторам конечного спроса, в расчете на единицу его продукции V по формулам

$$P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \ldots \\ p_n \end{pmatrix}, \; V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \ldots \\ v_n \end{pmatrix},$$

то систему уравнений **(1.7)** можно представить в матричной форме:

$$\Lambda^T P = V.$$

Решение этого уравнение имеет вид:

$$P = \left(\Lambda^T\right)^{-1} V ,$$

где $\left(\Lambda^T\right)^{-1}$ — матрица, обратная матрице Λ^T .

Для примера, приведенного в табл. 1.5 систему уравнений **(1.7)** можно записать в виде (правые части уравнений системы равны показателям матрицы, так как цена 1 человеко-года труда была принята равной 1 ден. ед.):

$$\begin{cases} (1-0,25)\,p_1 - 0,14 p_2 = 0,8, \\ -0,4 p_1 + (1-0,12)\,p_2 = 3,6. \end{cases}$$

Цена 1 ед. сельскохозяйственной и 1 ед. промышленной продукции определяется соотношением

$$P = \begin{pmatrix} 0,75 & -0,14 \\ -0,4 & 0,88 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0,8 \\ 3,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,457 & 0,232 \\ 0,662 & 1,242 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,8 \\ 3,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Как и следовало ожидать, цена 1 ед. сельскохозяйственной продукции равна 2 ден. ед., а цена 1 промышленной ед. продукции — 5 ден. ед.

В системе **(1.7)** каждое уравнение, начиная с первого, умножим соответственно на x_1, x_2, ..., x_n. В результате получим

$$\left.\begin{array}{l} x_1(1-a_{11})\,p_1 - x_1 a_{21} p_2 - \ldots - x_1 a_{n1} p_n = x_1 v_1, \\ -x_2 a_{12} p_1 + x_2(1-a_{22})\,p_2 - \ldots - x_2 a_{n2} p_n = x_2 v_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -x_n a_{1n} p_1 - x_n a_{2n} p_2 - \ldots + x_n(1-a_{nn})\,p_n = x_n v_n. \end{array}\right\} \quad \textbf{(1.8)}$$

В системе **(1.3)** каждое уравнение, начиная с первого, умножим соответственно на p_1, p_2, ..., p_n. После этого система будет иметь вид:

$$\left.\begin{array}{l} p_1(1-a_{11})\,x_1 - p_1 a_{12} x_2 - \ldots - p_1 a_{1n} x_n = p_1 y_1, \\ -p_2 a_{21} x_1 + p_2(1-a_{22})\,x_2 - \ldots - p a_{2n} x_n = p_2 y_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -p_n a_{n1} x_1 - p_n a_{n2} x_2 - \ldots + p_n(1-a_{nn})\,x_n = p_n y_n. \end{array}\right\} \quad \textbf{(1.9)}$$

Если сложить все слагаемые левой части системы **(1.8)**, то полученная сумма будет равна сумме всех слагаемых левой части системы **(1.9)**. Действительно, все слагаемые левой части первого уравнения системы **(1.8)** равны первому столбцу системы **(1.9)** и т.д. Если равна сумма слагаемых левых частей, то равна сумма и правых частей. Отсюда следует

$$x_1v_1 + x_2v_2 + \ldots + x_nv_n = y_1p_1 + y_2p_2 + \ldots + y_np_n. \qquad \textbf{(1.10)}$$

Это равенство подтверждает внутреннее единство стоимостных и физических взаимосвязей в рамках открытой системы межотраслевых связей. В левой части равенства имеем общую сумму добавленных стоимостей, выплаченных производящими секторами секторам конечного спроса. Правая часть равенства представляет собой сумму стоимостей продуктов, доставленных всеми производящими секторами секторам конечного спроса.

Упражнения

Тест 1.1. Укажите, какие из приведенных ниже высказываний являются правильными:

1) валовой внутренний продукт равен валовому национальному доходу минус сальдо доходов из-за границы;

2) национальный доход равен валовому национальному доходу минус амортизационные отчисления;

3) валовой внутренний продукт равен амортизационным отчислениям плюс чистый внутренний продукт;

4) национальный доход равен чистому внутреннему продукту плюс сальдо доходов из-за границы.

Задача 1.1. В условиях рассматриваемого в главе примера изменить в структурной матрице коэффициент прямых материальных затрат a_{11} на 0,15. Новая структурная матрица приведена в табл. 1.8.

Определить цену единицы сельскохозяйственной продукции и цену единицы промышленной продукции.

Таблица 1.8

Секторы-производители	*Секторы-потребители*			
	Сектор 1. Сельское хозяйство	*Сектор 2. Промышленность*	*Сектор 3. Домашнее хозяйство*	*Общий выпуск*
Сектор 1. Сельское хозяйство	0,15	0,4	0,183	100
Сектор 2. Промышленность	0,14	0,12	0,1	50
Сектор 3. Домашнее хозяйство	0,8	3,6	0,133	300

Библиографический список

1. *Агапова Т.А.*, *Серегина С.Ф.* Макроэкономика. М.: ДиС, 1997.
2. *Вечканов Г.С.*, *Вечканова Г.Р.* Макроэкономика. М.: Питер, 2006.
3. *Леонтьев В.* Межотраслевая экономика. М.: Экономика, 1997.
4. *Система* национальных счетов / Под ред. Ю.Н. Иванова. М.: Финстатинформ, 1996.
5. *Экономико-математические* методы и модели / Под ред. А.В. Кузнецова. Минск: БГЭУ, 1999.
6. *Экономическая* теория / Под ред. В.И. Видяпина и др. М.: ИНФРА-М, 2000.

Глава 2

Модели межотраслевого баланса

2.1. Схема межотраслевого баланса

Модель межотраслевого баланса разрабатывается на основе рассмотренных в гл. 1 положений, предложенных В. Леонтьевым. В основу этой модели положена взаимосвязь материальных, трудовых и финансовых ресурсов, потребляемых отраслями народного хозяйства. Все схемы межотраслевого баланса построены по принципам, предложенным В. Леонтьевым [1, 4—11].

Одна из таких схем приведена в табл. 2.1. В этой схеме данные представлены в денежных единицах (рублях), в отличие от натурального межотраслевого баланса, рассмотренного в гл. 1. В основе схемы межотраслевого баланса производства, потребления и накопления общественного продукта лежит разделение совокупного продукта на промежуточный и конечный. Все народное хозяйство представлено в виде n чистых отраслей.

Чистая отрасль — это условная отрасль, которая объединяет все производство данного продукта независимо от ведомственного подчинения предприятий. Каждая отрасль фигурирует в балансе как производящая и потребляющая. При анализе схемы межотраслевого баланса выделяются три квадранта баланса, обозначенные на схеме римскими цифрами. В квадранте I отражается структура потребления продуктов каждой конкретной отраслью, производимых другими отраслями. В квадранте II показана структура конечного использования произведенного продукта. В квадранте III приведена стоимостная структура валового внутреннего продукта (ВВП).

Таблица 2.1

Отрасли-производители	*Отрасли-потребители*				*Промежуточное потребление*	*Конечное использование*				*Валовой выпуск*
	1	*2*	…	*n*		*Конечное потребление*	*Валовое накопление*	*Сальдо экспорта-импорта*	*Итого*	
1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1n}	$\sum_{j=1}^{n} x_{1j}$	y_{11}	y_{12}	y_{13}	$\sum_{j=1}^{3} y_{1j}$	x_1
2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2n}	$\sum_{j=1}^{n} x_{2j}$	y_{21}	y_{22}	y_{23}	$\sum_{j=1}^{3} y_{2j}$	x_2
…	…	…	I	…	…	…	II	…	…	…
n	x_{n1}	x_{n2}	…	x_{nn}	$\sum_{j=1}^{n} x_{nj}$	y_{n1}	y_{n2}	y_{n3}	$\sum_{j=1}^{3} y_{nj}$	x_n
Промежуточные затраты	$\sum_{i=1}^{n} x_{i1}$	$\sum_{i=1}^{n} x_{i2}$	…	$\sum_{i=1}^{n} x_{in}$	$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$	$\sum_{i=1}^{n} y_{i1}$	$\sum_{i=1}^{n} y_{i2}$	$\sum_{i=1}^{n} y_{i3}$	$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{3} y_{ij}$	$\sum_{i=1}^{n} x_i$

Амортизация	v_{11}	v_{12}	...	v_{1n}	$\sum_{j=1}^{n} v_{1j}$	
Заработная плата	v_{21}	v_{22}	III	v_{2n}	$\sum_{j=1}^{n} v_{2j}$	
Прибыль	v_{31}	v_{32}	...	v_{3n}	$\sum_{j=1}^{n} v_{3j}$	
Налоги	v_{41}	v_{42}	...	v_{4n}	$\sum_{j=1}^{n} v_{4j}$	
Субсидии	$-v_{51}$	$-v_{52}$	...	$-v_{5n}$	$-\sum_{j=1}^{n} v_{5j}$	
Валовая добавленная стоимость	$\sum_{i=1}^{5} v_{i1}$	$\sum_{i=1}^{5} v_{i2}$	...	$\sum_{i=1}^{5} v_{in}$	$\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{n} v_{ij}$	
Валовой выпуск	x_1	x_2	...	x_n	$\sum_{j=1}^{n} v_j$	

Квадрант I — это таблица межотраслевых материальных связей. Показатели, помещенные на пересечении строк и столбцов, являются величинами межотраслевых потоков продукции и в общем виде обозначаются x_{ij}, где i — номер производящей отрасли, j — номер потребляющей отрасли. x_{ij} показывает, какое количество продукции, выпускаемой отраслью j, потребляется отраслью i. Эти данные размещаются в квадратной таблице размером $n \times n$.

В столбце «Конечное потребление» квадранта II отражаются виды конечного использования по сфере материального и нематериального производства.

По сфере *материального производства* отражаются следующие виды конечного использования:

- потребление конечных товаров и материальных услуг, купленных домашними хозяйствами за счет своих доходов;
- продукция личного подсобного хозяйства и другие натуральные доходы домашних хозяйств;
- покупка государственными учреждениями и некоммерческими организациями товаров и услуг для передачи домашним хозяйствам.

По сфере *нематериального производства* отражаются:

- объем платных услуг, потребляемых домашними хозяйствами за счет своих доходов;
- стоимость нерыночных услуг, оказываемых бюджетными организациями в сфере здравоохранения, образования, социального обеспечения, культуры, искусства.

В столбце «Валовое накопление» показано валовое накопление в отраслях материального производства основного капитала и оборотных средств.

В графе «Сальдо экспорта-импорта» показана сумма всего экспорта со знаком «+» и всего импорта со знаком «–».

В графе «Итого» приведена сумма данных предыдущих трех столбцов.

Сумма всех значений квадранта II «Конечное использование» $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{3} y_{ij}$ является валовым внутренним продуктом. Здесь при расчете ВВП применяется метод конечного использования, который предусматривает суммирование расходов на конечное потребление, валовое накопление, чистый экспорт товаров и услуг.

В столбце «Валовой выпуск» приводится сумма продуктов x_i, выпущенных отраслью i для промежуточного потребления, конечного потребления, валового накопления и сальдо экспорта-импорта.

Квадрант III отражает стоимостную структуру валового внутреннего продукта. Суммарная валовая добавленная стоимость $\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{n} v_{ij}$ является валовым внутренним продуктом. Здесь используется распределительный метод расчета ВВП, который включает амортизацию, заработную плату, косвенные налоги и прибыль. Для получения ВВП из суммы указанных показателей вычитают субсидии.

Статическая модель межотраслевого баланса в соответствии с табл. 2.1 выражается в виде двух систем уравнений.

Рассматривая схему межотраслевого баланса по строкам для каждой производящей области i, видим, что валовая продукция этой отрасли x_i равна сумме материальных затрат $\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$ всех отраслей $j = 1, 2, ..., n$, потребляющих продукцию отрасли x_i, а также конечной продукции данной области $\sum_{j=1}^{3} y_{ij}$, идущей на конечное использование. Таким образом,

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + \sum_{j=1}^{3} y_{ij}. \qquad \textbf{(2.1)}$$

Из столбцов схемы межотраслевого баланса следует потребление каждой областью j. Поскольку в межотраслевом балансе табл. 2.1 данные приведены в стоимостных единицах, то значения в столбцах можно складывать. Из схемы видно, что валовая продукция этой отрасли x_j равна сумме промежуточных материальных затрат $\sum_{i=1}^{n} x_{ij}$, потребляемых ею, и валовой добавленной стоимостью $\sum_{i=1}^{5} v_{ij}$, т.е.

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + \sum_{i=1}^{5} v_{ij}. \qquad \textbf{(2.2)}$$

Просуммировав по всем отраслям уравнения **(2.1)** и **(2.2)**, получим

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{3} y_{ij},$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{5} v_{ij}.$$

Левые части уравнения равны друг другу, так как представляют собой весь валовой общественный продукт. Следовательно, должно соблюдаться соотношение

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{3} y_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{5} v_{ij}. \qquad \textbf{(2.3)}$$

Это соотношение аналогично соотношению **(1.10)**, полученному в гл. 1. Левая часть уравнения **(2.3)** является суммой квадранта II, а правая — суммой квадранта III. В целом это уравнение показывает, что в межотраслевом балансе соблюдается принцип единства стоимостных и физических взаимосвязей в рамках открытой системы межотраслевых связей.

Введем обозначения:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}, \;\; y_i = \sum_{j=1}^{3} y_{ij}. \qquad \textbf{(2.4)}$$

Величины a_{ij} называются *коэффициентами прямых материальных затрат*. Эта величина отличается от величины, представленной в формуле **(1.1)**, размерностью и числовыми значениями для той же модели. Коэффициент прямых материальных затрат, представленный в формуле **(2.4)**, является безразмерной величиной. Он показывает измеренные в рублях затраты продукции сектора i, используемое в качестве затрат сектором под номером j для производства его продукции стоимостью 1 рубль. С учетом обозначений **(2.4)** системы уравнений **(2.1)** и **(2.2)** можно переписать в виде:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i, \qquad \textbf{(2.5)}$$

$$1 = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} + \frac{1}{x_j}\sum_{i=1}^{5} v_{ij}. \qquad \textbf{(2.6)}$$

Если ввести матрицу прямых материальных затрат A, вектор-столбец валовой продукции X и вектор-столбец продукции конечного использования Y по формулам

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \;\; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_3 \end{pmatrix}, \;\; Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_4 \end{pmatrix},$$

то систему уравнений **(2.5)** можно представить в матричной форме:

$$X = AX + Y. \tag{2.7}$$

2.2. Коэффициенты полных материальных затрат

Системы уравнений **(2.5)** и **(2.7)** называются экономико-математической моделью межотраслевого баланса Леонтьева или моделью «затраты-выпуск». С помощью этой модели можно определить, например, объем продукции конечного использования каждой отрасли y_i, задав коэффициенты прямых материальных затрат a_{ij} и величины валовой продукции каждой отрасли x_j, по формуле

$$Y = (E - A)X, \tag{2.8}$$

где E — единичная матрица размерности $n \times n$.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Уравнение **(2.8)** совпадает с уравнением **(1.4)**, так как $E - A = \Lambda$.

Если известны объем продукции конечного использования каждой отрасли y_i и коэффициенты прямых материальных затрат a_{ij}, то можно определить величины валовой продукции каждой области x_j из соотношений

$$X = (E - A)^{-1} Y, \tag{2.9}$$

где $(E - A)^{-1}$ — матрица, обратная матрице $(E - A)$.

Если обратную матрицу обозначить через $B = (E - A)^{-1} = (b_{ij})$, то система уравнений запишется в виде:

$$X = B \cdot Y. \tag{2.10}$$

Систему уравнений **(2.10)** в матричной форме можно представить в виде обычной системы уравнений:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} y_j. \quad \textbf{(2.11)}$$

Перепишем систему **(2.11)** в развернутом виде:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \ldots + b_{1n}y_n, \\ x_2 &= b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \ldots + b_{2n}y_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \ldots + b_{nn}y_n. \end{aligned}\right\} \quad \textbf{(2.12)}$$

Коэффициенты b_{ij} называются коэффициентами полных материальных затрат. Для уяснения их экономического смысла положим, что осуществляется выпуск конечной продукции лишь одной j-й отрасли. Если это, например, первая отрасль, то выпуск конечной продукции этой отрасли равен y_1, а $y_2 = y_3 = \ldots = y_n = 0$. Тогда **(2.12)** принимает вид:

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}y_1, \\ x_2 = b_{21}y_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = b_{n1}y_1. \end{cases}$$

Отсюда следует, что для того, чтобы обеспечить конечную продукцию в объеме y_1, необходимо обеспечить валовой выпуск продукции всех отраслей соответственно в объеме $b_{11}, b_{21}, \ldots, b_{n1}$. Таким образом, элементы первого столбца матрицы B показывают количество валовой продукции отраслей, необходимое для производства единицы продукции конечного использования первой отрасли. Точно так же элементы j-го столбца матрицы B показывают количество валовой продукции отраслей, необходимое для производства единицы продукции конечного использования j-й отрасли.

▷ **Пример 2.1.** Для трехотраслевой экономической системы заданы матрица коэффициентов прямых материальных затрат и вектор конечной продукции:

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,3 \\ 0,2 & 0,3 & 0,4 \\ 0,3 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 300 \\ 400 \\ 500 \end{pmatrix}.$$

Найти коэффициенты полных материальных затрат и вектор валовой продукции, заполнить схему межотраслевого материального баланса.

Р е ш е н и е. Матрица полных материальных затрат вычисляется по формуле

$$B = (E - A)^{-1} = (b_{ij}).$$

Найдем

$$E - A = \begin{pmatrix} 0,9 & -0,2 & -0,3 \\ -0,2 & 0,7 & -0,4 \\ -0,3 & -0,2 & 0,9 \end{pmatrix}.$$

Определим обратную матрицу $(E - A)^{-1}$. Для этих целей можно использовать, например, метод Гаусса или воспользоваться услугами компьютерной программы Excel. Обратная матрица имеет вид:

$$(E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1,528 & 0,667 & 0,806 \\ 0,833 & 2 & 1,167 \\ 0,694 & 0,667 & 1,639 \end{pmatrix}.$$

Величины валовой продукции трех отраслей определим по формуле **(2.9)**:

$$X = (E - A)^{-1} Y = \begin{pmatrix} 1,528 & 0,667 & 0,806 \\ 0,833 & 2 & 1,167 \\ 0,694 & 0,667 & 1,639 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 300 \\ 400 \\ 500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1127,88 \\ 1633,33 \\ 1294,44 \end{pmatrix}.$$

Эти значения валового выпуска по отраслям-производителям представлены в последнем столбце и последней строке табл. 2.2.

Таблица 2.2

Отрасли-производители	*Отрасли-потребители*			*Промежуточное потребление*	*Конечное использование*	*Валовой выпуск*
	1	*2*	*3*			
1	112,778	326,666	388,332	827,776	300	1127,78
2	225,556	489,999	517,776	1233,331	400	1633,33
3	338,334	326,666	129,444	794,444	500	1294,44
Промежуточные затраты	676,668	1143,331	1035,552	2855,551	1200	
Валовая добавленная стоимость	451,112	489,999	258,888			
Валовой выпуск	1127,78	1633,33	1294,44			4055,55

Соотношение для расчета величин межотраслевых потоков продукции рассчитывается по формуле (см. **(2.4)**)

$$x_{ij} = x_j \cdot a_{ij}.$$

Например, $x_{11} = a_{11} \cdot x_1 = 0{,}1 \cdot 1127{,}78 = 112{,}778$,

$$x_{12} = a_{12} \cdot x_2 = 0{,}2 \cdot 1633{,}33 = 326{,}666 \text{ и т.д.}$$

Промежуточное потребление находят как сумму потребления отраслями. Слагаемые этой суммы представлены в строках таблицы. Промежуточные затраты находят как сумму затрат. Слагаемые этой суммы представлены в столбцах таблицы. Эти две суммы равны друг другу.

Валовую добавленную стоимость определяют как разность между валовым выпуском и промежуточными затратами.

В квадранте IV табл. 2.2 приведено значение, показывающее, что сумма элементов квадранта III совпадает с суммой элементов квадранта II. ◄

2.3. Продуктивная матрица

В общем случае решение **(2.9)** уравнения **(2.8)** может иметь как положительные, так и отрицательные значения. В модели межотраслевого баланса эти решения могут быть только положительными, так как отрицательное значение валового выпуска лишено смысла. Отсюда следует задача о свойствах матрицы прямых материальных затрат A, при которых выпуски будут положительными.

Система **(2.5)**, или **(2.8)**, называется продуктивной, если она разрешима в неотрицательных x_i, т.е. $x_i \geq 0$ при условии, что матрица-столбец $Y \geq 0$. Матрица прямых материальных затрат в этом случае также называется *продуктивной.*

Продуктивность матрицы связана с ее собственным числом и вектором. Для матрицы размера $n \times n$ вектор $\overline{x}$ называется собственным вектором матрицы A, если найдено такое число λ, что

$$A\overline{x} = \lambda\overline{x}.$$

Число λ называется собственным значением матрицы A, соответствующим вектору $\overline{x}$. Перенеся левую часть уравнения в правую часть и принимая во внимание соотношение $\lambda \cdot \overline{x} = \lambda \cdot E \cdot \overline{x}$, перепишем уравнение в виде:

$$(\lambda E - A)\overline{x} = 0.$$

Это уравнение эквивалентно системе линейных однородных уравнений, имеющий вид

$$\left.\begin{array}{l}(\lambda-a_{11})x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0,\\ a_{21}x_1 + (\lambda-a_{22})x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (\lambda-a_{nn})x_n = 0.\end{array}\right\} \quad \textbf{(2.13)}$$

Для существования ненулевого решения этой системы линейных однородных уравнений необходимо и достаточно, чтобы определитель коэффициентов этой системы равнялся нулю, т.е.

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Этот определитель является многочленом n-й степени относительно λ и называется характеристическим многочленом матрицы A, а уравнение — характеристическим уравнением матрицы A. Корни этого уравнения соответствуют собственным числам матрицы A. Определив набор этих чисел, для каждого из них можно найти собственный вектор.

Теорема о продуктивности матрицы [4, 6, 9] может быть сформулирована в следующем виде: модель Леонтьева продуктивна тогда и только тогда, когда $\lambda < 1$.

Можно показать [4], что при $\lambda < 1$ матрица $(E-A)^{-1}$, обратная матрице $(E-A)$, будет положительной, т.е. $(E-A)^{-1} > 0$. Тогда для любого положительного объема продукции конечного использования, описываемого матрицей-столбцом (вектором) $Y > 0$, решение системы уравнений $X = (E-A)^{-1}Y$ будет неотрицательным.

Другим, более простым признаком продуктивности матрицы A является ограничение на сумму элементов ее строк. Этот признак звучит следующим образом: если сумма элемента каждой строки не превосходит единицы, а сумма элементов хотя бы для одной строки строго меньше единицы, то модель Леонтьева продуктивна. Заметим, что в общем случае матрица может оказаться продуктивной и при сумме элементов строк более единицы.

▷ **Пример 2.2.** Является ли матрица $\begin{pmatrix} 0,3 & 0,4 & 0,2 & 0,1 \\ 0,4 & 0,1 & 0,1 & 0,4 \\ 0,2 & 0,3 & 0,4 & 0,1 \\ 0,3 & 0,4 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix}$ продуктивной?

Р е ш е н и е. Эта матрица является продуктивной, так как сумма ее элементов первых трех строк равна единице, а сумма элементов последней строки меньше единицы. ◄

2.4. Динамическая модель межотраслевого баланса

Статический межотраслевой баланс описывается системой уравнений **(2.7)**, в которой в каждом уравнении выпускаемая отраслью валовая продукция приравнивается сумме продукции, поглощаемой этой отраслью и всеми другими отраслями, и чистому выпуску, т.е. продукции конечного использования. Если теперь матрицу продукции конечного использования в каждый год $X^{(t)}$ представить как сумму инвестиций $Z^{(t)} = B^{(t)}\left(X^{(t)} - X^{(t-1)}\right)$ и продукции конечного потребления $Y^{(t)}$, то динамическая модель будет выглядеть следующим образом:

$$X^{(t)} = AX^{(t)} + B^{(t)}\left(X^{(t)} - X^{(t-1)}\right) + Y^{(t)}, \qquad \textbf{(2.14)}$$

где индекс t в скобках сверху у буквы означает номер года, матрица $B^{(t)}$ характеризует инвестиции, поставляемые из отрасли в отрасль и вводится аналогично матрице прямых материальных затрат A. Элементы матрицы A определяются по первой формуле **(2.4)**. Аналогичным образом определяются элементы матрицы $B^{(t)}$, т.е.

$$b_{ij}^{(t)} = \frac{z_{ij}^{(t)}}{x_j^{(t)} - x_j^{(t-1)}}, \qquad \textbf{(2.15)}$$

где z_{ij}^t — элемент матрицы $B^{(t)}$ поставки продукции отраслью i на инвестиционные цели в отрасль j.

В динамической модели межотраслевого баланса рассматриваются показатели модели для концов периодов под номером t, изменяющихся от 1 до T. В качестве начальных условий задается выпуск в нулевом году $X^{(0)}$. При известном конечном потреблении $Y^{(t)}$ уравнение **(2.14)** можно представить в виде:

$$\left(E - A^{(t)} - B^{(t)}\right) \cdot X^{(t)} = Y^{(t)} - B^{(t)} \cdot X^{(t-1)}.$$

Решение этого уравнения

$$X^{(t)} = \left(E - A^{(t)} - B^{(t)}\right)^{-1} \cdot \left(Y^{(t)} - B^{(t)} \cdot X^{(t-1)}\right). \tag{2.16}$$

Как следует из этой формулы, для увеличения выпуска $X^{(t)}$ надо увеличивать конечное потребление $Y^{(t)}$ по сравнению с предыдущим годом.

Представим произведение двух матриц $B^{(t)}\left(X^{(t)} - X^{(t-1)}\right)$ в виде матрицы-столбца инвестиций $Z^{(t)} = B^{(t)}\left(X^{(t)} - X^{(t-1)}\right)$. Тогда при известном выпуске и конечном потреблении формулу для этой матрицы-столбца можно найти из уравнения **(2.14)**. Эта формула имеет вид:

$$Z^{(t)} = \left(E - A\right) X^{(t)} - Y^{(t)}.$$

В модели межотраслевого баланса реальной экономики обязательно действуют ограничивающие факторы. Одним из таких факторов является ограничение на трудовые ресурсы, задаваемые неравенством

$$l \cdot X^{(t)} \le L^{(t)},$$

где $L^{(t)}$ — трудовые ресурсы; l — матрица-строка трудоемкости, или затраты труда на производство единицы продукции.

При учете отраслевых мощностей необходимо учитывать, что валовой выпуск ограничен этими мощностями. Это ограничение задается при помощи естественного неравенства

$$\overline{X}^{(t)} \le \overline{X}^{(t-1)} + Z^{(t)},$$

где $\overline{X}^{(t)}$ — матрица-столбец отраслевых мощностей.

Если ввести коэффициент выбытия мощностей μ_i i-й отрасли, то отраслевые мощности этой отрасли могут быть заданы равенством

$$\overline{X}_i^{(t)} = \left(1 - \mu_i\right) \overline{X}_i^{(t-1)} + Z_i^{(t)}.$$

Рассмотренная здесь динамическая модель межотраслевого баланса предполагает, что в рассматриваемом периоде мощности отраслей используются полностью. Поэтому в периоды кризисов или в условиях переходной экономики вместо равенства **(2.14)** следует использовать систему неравенств, показывающих, например, что общий валовой выпуск должен покрывать текущие производственные затраты, затраты продукции на расширение производственных мощностей и на непроизводственное потребление. Валовые выпуски отраслей не должны превышать производственные мощности и имеющиеся трудовые ресурсы.

▷ **Пример 2.3.** Для примера, приведенного в табл. 1.4, данные которой принимаются в качестве начальных условий задачи, рассчитать параметры межотраслевого баланса для первого и второго годов. При этом непроизводственное потребление принять:

вариант 1: $Y^{(1)} = \begin{pmatrix} 110 \\ 150 \end{pmatrix}$; вариант 2: $Y^{(1)} = \begin{pmatrix} 120 \\ 160 \end{pmatrix}$, $Y^{(2)} = \begin{pmatrix} 130 \\ 170 \end{pmatrix}$.

Матрицу $B^{(t)}$, характеризующую инвестиции, поставляемые из отрасли в отрасль, принять независимой от времени и равной:

$$B^{(t)} = B = \begin{pmatrix} 0,06 & 0,02 \\ 0,04 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Как следует из данных табл. 1.4, общий валовой выпуск в год под номером ноль определяется матрицей-столбцом $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 200 \\ 250 \end{pmatrix}$.

Элементы матрицы прямых материальных затрат A определяются по первой формуле **(2.4)**. Например, $a_{11} = \dfrac{x_{11}}{x_1} = \dfrac{50}{200} = 0,25$,

$a_{11} = \dfrac{x_{12}}{x_2} = \dfrac{40}{250} = 0,16$ и т.д. Таким образом, матрица прямых материальных затрат имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,16 \\ 0,35 & 0,12 \end{pmatrix}.$$

Вариант 1. Выпуск в первом году находим по формуле **(2.14)**.

Подставив в **(2.14)** исходные данные, получим

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} 1-0,25-0,06 & -0,16-0,02 \\ -0,35-0,04 & 1-0,12-0,1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \left(\begin{pmatrix} 110 \\ 150 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,06 & 0,02 \\ 0,04 & 0,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 250 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,69 & -0,18 \\ -0,39 & 0,78 \end{pmatrix}^{-1} \left(\begin{pmatrix} 110 \\ 150 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 17 \\ 33 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0,69 & -0,18 \\ -0,39 & 0,78 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 93 \\ 117 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 250 \end{pmatrix}.$$

Выпуск в первом году равен выпуску нулевого года. Полученного результата следовало ожидать, так как в табл. 1.4 приведен баланс без учета инвестиций. Этот результат легко проверить, подставив полученные данные в формулу

$$Z^{(1)} = (E - A) X^{(1)} - Y^{(1)},$$

$$Z^{(1)} = \begin{pmatrix} 1-0,25 & -0,16 \\ -0,35 & 1-0,12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 250 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 110 \\ 150 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ 150 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 110 \\ 150 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что для второго года получим тот же результат.

Вариант 2. В этом варианте, в отличие от предыдущего, непроизводственное потребление определяется матрицей-столбцом $Y^{(1)} = \begin{pmatrix} 120 \\ 160 \end{pmatrix}$. Тогда выпуск в первом году будет равен:

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} 1-0,25-0,06 & -0,16-0,02 \\ -0,35-0,04 & 1-0,12-0,1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \left(\begin{pmatrix} 120 \\ 160 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,06 & 0,02 \\ 0,04 & 0,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 250 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,69 & -0,18 \\ -0,39 & 0,78 \end{pmatrix}^{-1} \left(\begin{pmatrix} 120 \\ 160 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 17 \\ 33 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0,69 & -0,18 \\ -0,39 & 0,78 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 103 \\ 127 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 220,51 \\ 273,08 \end{pmatrix}.$$

Матрица-столбец инвестиций будет равна

$$Z^{(1)} = \begin{pmatrix} 1-0,25 & -0,18 \\ -0,35 & 1-0,12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 220,51 \\ 273,08 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 120 \\ 160 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 121,69 \\ 163,13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 120 \\ 160 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,69 \\ 3,13 \end{pmatrix}.$$

Элемент матрицы B поставки продукции $z_{ij}^{(t)}$ отраслью i на инвестиционные цели в отрасль j находят из соотношения **(2.15)**. Этот элемент находят по формуле

$$z_{ij}^{(t)} = b_{ij}\left(x_j^{(t)} - x_j^{(t-1)}\right).$$

Предварительно найдем разность между матрицей-столбцом выпуска в первом году и в нулевом году:

$$X^{(1)} - X^{(0)} = \begin{pmatrix} 220,51 \\ 273,08 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 200 \\ 250 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20,51 \\ 23,08 \end{pmatrix}.$$

Используя эти данные, получим

$$z_{11}^{(1)} = b_{11}\left(x_1^{(1)} - x_1^{(0)}\right) = 0,06 \cdot 20,51 = 1,23;$$

$$z_{12}^{(1)} = b_{12}\left(x_2^{(1)} - x_2^{(0)}\right) = 0,02 \cdot 23,08 = 0,46;$$

$$z_{21}^{(1)} = b_{21}\left(x_1^{(1)} - x_1^{(0)}\right) = 0,04 \cdot 20,51 = 0,82;$$

$$z_{22}^{(1)} = b_{22}\left(x_2^{(1)} - x_2^{(0)}\right) = 0,1 \cdot 23,08 = 2,31.$$

Проведем проверку, подставив результаты в правую часть исходной формулы $X^{(1)} = AX^{(1)} + B^{(1)}\left(X^{(1)} - X^{(0)}\right) + Y^{(1)}$:

$$\begin{pmatrix} 0,25 & 0,16 \\ 0,35 & 0,12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 220,51 \\ 273,08 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,06 & 0,02 \\ 0,04 & 0,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20,51 \\ 23,08 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 120 \\ 160 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 98,82 \\ 109,95 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1,69 \\ 3,13 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 120 \\ 160 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 220,51 \\ 273,08 \end{pmatrix}.$$

После проведения расчетов получим результат, тождественно равный валовому выпуску за первый год.

За второй год непроизводственное потребление определяется матрицей-столбцом $Y^{(2)} = \begin{pmatrix} 130 \\ 170 \end{pmatrix}$. Тогда выпуск во втором году будет равен:

$$X^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 - 0,25 - 0,06 & -0,16 - 0,02 \\ -0,35 - 0,04 & 1 - 0,12 - 0,1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \left(\begin{pmatrix} 130 \\ 170 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,06 & 0,02 \\ 0,04 & 0,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 220,51 \\ 273,08 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,69 & -0,27 \\ -0,39 & 0,78 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \left(\begin{pmatrix} 130 \\ 170 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 18,69 \\ 36,13 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0,69 & -0,18 \\ -0,39 & 0,78 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 111,31 \\ 133,87 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 237,00 \\ 290,13 \end{pmatrix}.$$

Матрица-столбец инвестиций будет равна:

$$Z^{(2)} = \begin{pmatrix} 1-0,25 & -0,18 \\ -0,35 & 1-0,12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 237,00 \\ 290,13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 130 \\ 170 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 131,34 \\ 172,36 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 130 \\ 170 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,34 \\ 2,36 \end{pmatrix}.$$

Элемент матрицы B поставки продукции $z_{ij}^{(t)}$ отраслью i на инвестиционные цели в отрасль j находят из соотношения **(2.15)**. Этот элемент находят по формуле

$$z_{ij}^{(t)} = b_{ij}\left(x_j^{(t)} - x_j^{(t-1)}\right).$$

Предварительно найдем разность между матрицей-столбцом выпуска во втором году и в первом году:

$$X^{(2)} - X^{(1)} = \begin{pmatrix} 237,00 \\ 290,13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 220,51 \\ 273,08 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16,49 \\ 17,05 \end{pmatrix}.$$

Используя эти данные, получим

$$z_{11}^{(2)} = b_{11}\left(x_1^{(2)} - x_1^{(1)}\right) = 0,06 \cdot 16,49 = 0,99;$$

$$z_{12}^{(2)} = b_{12}\left(x_2^{(2)} - x_2^{(1)}\right) = 0,02 \cdot 17,05 = 0,341;$$

$$z_{21}^{(2)} = b_{21}\left(x_1^{(2)} - x_1^{(1)}\right) = 0,04 \cdot 16,49 = 0,66;$$

$$z_{22}^{(2)} = b_{22}\left(x_2^{(2)} - x_2^{(1)}\right) = 0,1 \cdot 17,05 = 1,705.$$

Проведем проверку, подставив результаты в правую часть исходной формулы $X^{(2)} = AX^{(2)} + B\left(X^2 - X^{(1)}\right) + Y^{(2)}$:

$$\begin{pmatrix} 0,25 & 0,16 \\ 0,35 & 0,12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 237,00 \\ 290,13 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,06 & 0,02 \\ 0,04 & 0,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 16,49 \\ 17,05 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 130 \\ 170 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 105,67 \\ 117,77 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1,33 \\ 2,36 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 130 \\ 170 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 237,00 \\ 290,13 \end{pmatrix}.$$

После проведения расчетов получим результат, тождественно равный валовому выпуску за второй год. ◄

2.5. Модель Неймана

Модель Неймана [1, 4—6] применяется для изучения расширяющейся экономики. Эта модель, в отличие от модели Леонтьева, допускает производство одного продукта различными способами. Количество выпускаемых продуктов будем обозначать буквой n (в модели Леонтьева этой буквой обозначали количество отраслей), а количество способов их производства — буквой m. Количество отраслей в модели Неймана не рассматривается. Каждый способ производства под номером j задается матрицей-столбцом затрат $a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ на единицу интенсивности и соответствующей матрицей-столбцом выпусков $b_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \dots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$. Таким образом, в результате производственного процесса затрачивается матрица-столбец a_j и выпускается за счет этого матрица-столбец b_j.

Интенсивностью производственного процесса называется объем товаров или услуг, выпускаемых в результате этого процесса в единицу времени.

Пара $(a_j,\ b_j)$ характеризует технологический потенциал, заложенный в процессе под номером j, и называется *базисом* этого j-го производственного процесса. Все базисы производства называются *базисными процессами*. Базисные процессы можно описать матрицей затрат A и матрицей выпуска B.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix}.$$

Коэффициенты затрат и выпуска неотрицательны, т.е. $a_{ij} \geq 0$ и $b_{ij} \geq 0$. Поскольку для реализации любого процесса необходимы затраты хотя бы одного продукта, то для каждого j найдется хотя бы одно i, для которого

$$a_{ij} > 0.$$

Аналогично, так как каждый продукт может быть произведен хотя бы одним способом, для каждого i найдется такое j, что

$$b_{ij} > 0.$$

Продукция, идущая на конечное использование, в явном виде в модели Неймана не выделяется. Так как все секторы в модели рассматриваются как внутренние, или эндогенные, то рассматриваемая модель является замкнутой.

В модели Неймана заложен динамический процесс, причем осуществление затрат и выпуска готовой продукции разделено временны́м интервалом, например годом. Номер года будем обозначать буквой t. Тогда $t = 0, 1, ..., T$, где T — общая длительность всего производственного процесса. Номер года помещается в виде верхнего индекса при показателе в скобках. Если матрицу-столбец интенсивностей производственных процессов обозначить

$$X^{(t)} = \begin{pmatrix} x_1^{(t)} \\ x_2^{(t)} \\ \dots \\ x_m^{(t)} \end{pmatrix},$$

то матрицу-столбец затрат и матрицу-столбец выпусков для года под номером t соответственно можно представить в виде

$$AX^{(t)} \text{ и } BX^{(t)}.$$

Одним из условий модели Неймана является требование использования для производства товаров и услуг в данном периоде только тех продуктов, которые были произведены в предыдущем периоде. Отсюда следует, что затраты $AX^{(t)}$ в периоде под номером t не должны превышать выпуска в периоде под номером $t-1$. Поэтому должны выполняться условия

$$AX^{(t)} \le BX^{(t-1)}, \qquad \textbf{(2.17)}$$

где $t = 0, 1, ..., T$ — номер периода; $Bx^{(0)}$ — начальные условия, или матрица-столбец запаса товаров к началу процесса.

Модель Неймана, представленная в виде **(2.17)**, задана в натуральной форме.

Матрицу-строку цен товаров можно ввести по формуле

$$P^{(t)} = \begin{pmatrix} p_1^{(t)} & p_2^{(t)} & \dots & p_n^{(t)} \end{pmatrix},$$

где $p_i^{(t)}$ — цена продукта под номером i в году под номером t, $p_i^{(t)} \geq 0$.

Тогда издержки по всем базисным процессам в период времени $t-1$ можно записать в виде матрицы-строки $P^{(t-1)}A$ (затраты осуществляются по цене начала периода), а выручку в период времени t — в виде матрицы-строки $P^{(t)}B$ (готовая продукция оценивается в конце периода). Модель Неймана в денежным выражении представляется в виде

$$P^{(t-1)}A \geq P^{(t)}B, \quad \textbf{(2.18)}$$

$$P^{(t-1)}AX^{(t)} \geq P^{(t)}BX^{(t)}, \quad \textbf{(2.19)}$$

где $t = 0, 1, \dots, T$ — номер периода.

Из выражений **(2.18)** и **(2.19)** следует, что ни один процесс в модели Неймана не приносит дохода. Одним из объяснений этого является то, что издержки относятся к началу периода, а выручка — к его концу, т.е. разнесены во времени. Если же цены во времени падают, т.е. $P^{(t-1)} > P^{(t)}$, то существование соотношения **(2.18)** вполне логично, так как предприниматель может за те же деньги купить больше товаров в натуральной форме.

Если принять, что общая масса денег постоянна, то соотношение **(2.19)** можно записать в виде равенства

$$P^{(t-1)}AX^{(t)} = P^{(t)}BX^{(t)}. \quad \textbf{(2.20)}$$

▷ **Пример 2.4.** Дана матрица затрат $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$, начальная матрица-строка цен $P^{(0)}A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix}$ и матрица-столбец начальных запасов $Bx^{(0)} = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \end{pmatrix}$.

Найти такую интенсивность производственных процессов, при которых выпуск в конце первого года будет максимальным, и определить этот выпуск.

Р е ш е н и е. Используя соотношение **(2.17)** и условия задачи, найдем

$$AX^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1^{(1)} + 4x_2^{(1)} \\ 6x_1^{(1)} + 3x_2^{(1)} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 2x_1^{(1)} + 4x_2^{(1)} \\ 6x_1^{(1)} + 3x_2^{(1)} \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \end{pmatrix}.$$

Выпуск в конце первого периода определяется соотношением **(2.20)** и будет равен:

$$P^{(1)}BX^{(1)} = P^{(0)}AX^{(1)} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix} = 5x_1^{(1)} + 6x_2^{(1)}.$$

Полученные данные позволяют записать следующую задачу линейного математического программирования:

$$5x_1^{(1)} + 6x_2^{(1)} \to \max$$

при условиях

$$2x_1^{(1)} + 4x_2^{(1)} \le 20,$$

$$6x_1^{(1)} + 3x_2^{(1)} \le 30,$$

$$x_1^{(1)} \ge 0, \quad x_2^{(1)} \ge 0.$$

Методы решения таких задач изложены во многих книгах, например, в [2, 3]. Рассматриваемую задачу можно решить графическим способом. Построим область решений специальных ограничений задачи. Границей первой полуплоскости является прямая $2x_1^{(1)} + 4x_2^{(1)} = 20$ или $x_1^{(1)} = -2x_2^{(1)} + 10$. Эта прямая проходит через две точки с координатами $(10; 5)$ (рис. 2.1). Аналогично строим график прямой $6x_1^{(1)} + 3x_2^{(1)} = 30$. Координатами точки пересечения являются решения системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1^{(1)} + 4x_2^{(1)} = 20, \\ 6x_1^{(1)} + 3x_2^{(1)} = 30. \end{cases}$$

Отсюда находим $x_1^{(1)} = \dfrac{10}{3}$, $x_2^{(1)} = \dfrac{10}{3}$.

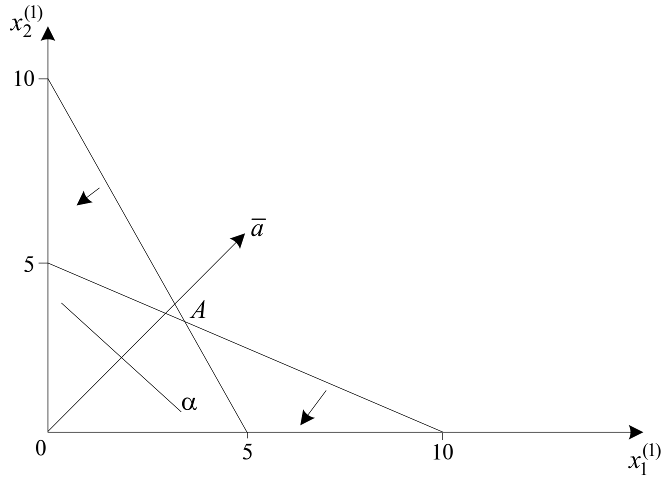


Рис. 2.1. **Область допустимых решений**

Областью допустимых решений является четырехугольник с углами, имеющими координаты $(0; 0)$, $(0; 5)$, $A\left(\frac{10}{3}; \frac{10}{3}\right)$, $(5; 0)$.

Вектор $\overline{a}$ имеет проекцию на ось $0x_1^{(1)}$, равную 5, а на ось $0x_2^{(1)}$ — равную 6, т.е.

$$\overline{a} = 5 \cdot \overline{i} + 6 \cdot \overline{j}.$$

Строим вектор $\overline{a}$ и проводим линии уровня $\alpha = 5 \cdot x_1^{(1)} + 6 \cdot x_2^{(1)}$, перпендикулярные этому вектору.
Последней точкой встречи прямой уровня с областью допустимых решений является точка $A\left(\frac{10}{3}; \frac{10}{3}\right)$. Поэтому $x_1^{(1)}{}_{\text{опт,max}} = \frac{10}{3}$; $x_2^{(1)}{}_{\text{опт,max}} = \frac{10}{3}$. Максимальный выпуск в конце первого периода будет равен

$$\left(P^{(1)} B X^{(1)}\right)_{\max} = 5x_1^{(1)} + 6x_2^{(1)} = \frac{50}{3} + 20 = \frac{110}{3} \text{ ден. ед.} \blacktriangleleft$$

В общем случае динамическую модель Неймана можно записать в виде:

$$\left.\begin{array}{l} AX^{(t)} \le BX^{(t-1)}, \\ P^{(t)}AX^{(t)} = P^{(t)}BX^{(t-1)}, \\ P^{(t-1)}A \ge P^{(t)}B, \\ P^{(t-1)}AX^{(t)} = P^{(t)}BX^{(t)}, \\ X^{(t)} \ge 0,\, P^{(t)} \ge 0,\, t = 1, \ldots, T. \end{array}\right\} \quad \textbf{(2.20)}$$

Если год от года выпуск увеличивается, то говорят о сбалансированном росте производства. При этом для всех производственных процессов должно выполняться соотношение

$$x_j^{(t)} = x_j^{(t-1)} + \lambda x_j^{(t-1)}, \quad \textbf{(2.21)}$$

где $\lambda > 0$ — темп сбалансированного роста производства, $t = 1, \ldots, T$, $j = 1, \ldots, m$.

Из соотношения **(2.21)** найдем формулу для темпа сбалансированного роста:

$$\lambda = \frac{x_j^{(t)} - x_j^{(t-1)}}{x_j^{(t-1)}}.$$

Если известна интенсивность к началу рассматриваемого процесса $x_j^{(0)}$, то соотношение **(2.21)** можно переписать в виде:

$$x_j^{(t)} = (1+\lambda)^t x_j^{(0)}.$$

В этой формуле t в коэффициенте $(1+\lambda)^t$ является показателем степени.

Последовательность $X = \left\{X^{(t)},\ t = 0, 1, \ldots, T\right\}$ называется *траекторией производства*. Если выполняется соотношение **(2.21)**, т.е. имеет место сбалансированное производство, то траектория производства называется *стационарной*.

Если год от года цены уменьшаются, то говорят о сбалансированном снижении цен. При этом для всех цен должно выполняться соотношение

$$p_j^{(t-1)} = p_j^{(t)} + rp_j^{(t)}, \quad \textbf{(2.22)}$$

где $r > 0$ — норма процента, или ставка наращения, $t = 1, \ldots, T$, $j = 1, \ldots, m$.

Из соотношения **(2.22)** найдем формулу для нормы процента и цены продукта в год под номером t:

$$r = \frac{p_j^{(t-1)} - p_j^{(t)}}{p_j^{(t)}}\ ;\ \ p_j^{(t)} = \frac{1}{1+r} \cdot p_j^{(t-1)}\,.$$

Если известна цена к началу рассматриваемого процесса $p_j^{(0)}$, то соотношение **(2.22)** можно переписать в виде:

$$p_j^{(0)} = (1+r)^t\, p_j^{(t)},\ \text{или}\ \ p_j^{(t)} = \frac{1}{(1+r)^t} \cdot p_j^{(0)}\,.$$

В рассматриваемом случае последовательность $p = \left\{p^{(t)},\ t = 0, 1, ..., T\right\}$ называется *стационарной траекторией цен.*

Если для модели Неймана существуют стационарная траектория производства $X = \left\{X^{(t)},\ t = 0, 1, ..., T\right\}$, стационарная траектория цен $P = \left\{P^{(t)}, t = 0,1,...,T\right\}$, темп сбалансированного роста производства $\lambda > 0$ и норма процента $r > 0$, то указанные четыре показателя в комплексе образуют состояние динамического равновесия в модели Неймана.

Среди всех темпов сбалансированного роста производства λ и норм процента r можно выбрать максимальный темп сбалансированного роста производства и минимальную норму процента. Обозначим максимальный темп сбалансированного роста производства как $\bar{\lambda}$, а минимальную норму процента — $\bar{r}$. В [1] показано, что в состоянии равновесия $\bar{\lambda}$ и $\bar{r}$ существуют и равны между собой:

$$\bar{\lambda} = \bar{r} = \frac{P^{(t)} B X^{(t)}}{P^{(t)} A X^{(t)}} - 1\,,$$

если для начальных условий выполняется соотношение

$$\bar{\lambda} = \bar{r} = \frac{P^{(0)} B X^{(0)}}{P^{(0)} A X^{(0)}} - 1\,.$$

Для условий максимального темпа сбалансированного роста производства и минимальной нормы процента траектория производства

$$\overline{X} = \left\{ \overline{X}^{(t)},\ t = 0, 1, \ldots, T \right\}$$

называется *траекторией равновесного роста*, или *траекторией Неймана*, или *лучом Неймана*, или *магистралью*. Эта траектория соответствует максимальному сбалансированному росту:

$$\overline{x}_j^{(t)} = \left(1 + \overline{\lambda}\right)^t \overline{x}_j^{(0)}.$$

▷ **Пример 2.5.** Для модели Неймана с матрицами $A = \begin{pmatrix} 0,8 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ и с начальными условиями $P^{(0)} = \begin{pmatrix} 24 & 30 \end{pmatrix}$, $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 50 \\ 40 \end{pmatrix}$ найти максимальный темп сбалансированного роста производства и минимальную норму процента, а также луч Неймана.

Р е ш е н и е. Максимальный темп сбалансированного роста производства и минимальную норму процента определим по формуле

$$\overline{\lambda} = \overline{r} = \frac{P^{(0)} B X^{(0)}}{P^{(0)} A X^{(0)}} - 1 = \frac{\begin{pmatrix} 24 & 30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 \\ 40 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 24 & 30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,8 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 \\ 40 \end{pmatrix}} - 1 =$$

$$= \frac{\left(24 \cdot 1 + 30 \cdot 2\right) 50 + \left(24 \cdot 3 + 30 \cdot 4\right) 40}{\left(24 \cdot 0,8 + 30 \cdot 1\right) 50 + \left(24 \cdot 4 + 30 \cdot 3\right) 40} - 1 = 0,2.$$

Для первого периода получим

$$\overline{x}_1^{(1)} = \overline{x}_1^{(0)} + \overline{\lambda} \overline{x}_1^{(0)}; \quad \overline{\lambda} = 0,2; \quad \overline{x}_1^{(1)} = 50 + 0,2 \cdot 50 = 60;$$

$$\overline{x}_2^{(1)} = \overline{x}_2^{(0)} + \overline{\lambda} \overline{x}_2^{(0)}; \quad \overline{\lambda} = 0,2; \quad \overline{x}_2^{(0)} = 40 + 0,2 \cdot 40 = 48;$$

$$\overline{p}_1^{(1)} = \frac{\overline{p}_1^{(0)}}{1 + \overline{r}}; \quad \overline{\lambda} = 0,2; \quad \overline{p}_1^{(1)} = \frac{24}{1 + 0,2} = 20;$$

$$\overline{p}_2^{(1)} = \frac{\overline{p}_2^{(0)}}{1 + \overline{r}}; \quad \overline{\lambda} = 0,2; \quad \overline{p}_2^{(1)} = \frac{30}{1 + 0,2} = 25;$$

$$\bar{\lambda} = \bar{r} = \frac{P^{(1)}BX^{(1)}}{P^{(1)}AX^{(1)}} - 1 = \frac{\begin{pmatrix} 20 & 25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 60 \\ 48 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 20 & 25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,8 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 60 \\ 48 \end{pmatrix}} - 1 =$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} 20 + 25 \cdot 2 & 20 \cdot 3 + 25 \cdot 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 60 \\ 48 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 20 \cdot 0,8 + 25 & 20 \cdot 4 + 25 \cdot 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 60 \\ 48 \end{pmatrix}} - 1 = 0,2$$

Как и следовало ожидать, значения для нулевого и первого периодов совпали.

Луч Неймана, или магистраль, соответствующая максимальному сбалансированному росту, определяется соотношением

$$\bar{X}^{(t)} = \left(1 + \bar{\lambda}\right)^t \cdot \bar{X}^{(0)} = 1,2^t \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ 40 \end{pmatrix}. \blacktriangleleft$$

Упражнения

Задача 2.1. Найти собственные числа и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Задача 2.2. Для трехотраслевой экономической системы заданы матрица коэффициентов прямых материальных затрат, матрица коэффициентов вложений, вектор валовой продукции в предыдущий период и вектор объемов чистого продукта конечного использования:

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,4 \\ 0,2 & 0,5 & 0,0 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0,06 & 0,02 & 0,08 \\ 0,04 & 0,1 & 0,0 \\ 0,06 & 0,02 & 0,08 \end{pmatrix}; X^{t-1} = \begin{pmatrix} 775,5102 \\ 510,2041 \\ 729,5918 \end{pmatrix}; Y^{(t)} = \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 400 \end{pmatrix}.$$

Найти валовую продукцию отраслей, прирост валовой продукции каждой отрасли и поставки продукции фондообразующих отраслей i на инвестиционные цели отраслей j:

$$\left(E - A - B\right)X^{(t)} = Y^{(t)} - kX^{(t-1)}.$$

Задача 2.3. Для модели Неймана с матрицами $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 112/81 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ и с начальными условиями $P^{(0)} = (216\ 162)$, $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 100 \\ 125 \end{pmatrix}$ найти максимальный темп сбалансированного роста производства и минимальную норму процента, а также луч Неймана.

Библиографический список

1. *Данилов Н.Н.* Курс математической экономики. М.: Высшая школа, 2006.
2. *Кузнецов Б.Т.* Математика. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004.
3. *Кузнецов Б.Т.* Математические методы и модели исследования операций. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005.
4. *Колемаев В.А.* Математическая экономика. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005.
5. *Малыхин В.И.* Математическое моделирование экономики. М.: УРАО, 1998.
6. *Орлова И.В.* Экономико-математическое моделирование. М.: Вузовский учебник; ВЗФЭИ, 2007.
7. *Леонтьев В.* Межотраслевая экономика. М.: Экономика, 1997.
8. *Система* национальных счетов / Под ред. Ю.Н. Иванова. М.: Финстатинформ, 1996.
9. *Федосеев В.В.*, *Эриашвили Н.Д.* Экономико-математические методы и модели в маркетинге. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001.
10. *Экономико-математические* методы и модели / Под ред. А.В. Кузнецова. Минск: БГЭУ, 1999.
11. *Экономическая* теория / Под ред. В.И. Видяпина и др. М.: ИНФРА-М, 2000.

Глава 3

Макроэкономические производственные функции

3.1. Понятие макроэкономической производственной функции

Для анализа и изучения экономики часто используются ее производственные функции или производственные функции ее подсистем [1—6]. Производственная функция показывает зависимость результатов выходных характеристик экономики от входных, или ресурсов. В качестве таких входных характеристик часто используются затраты капитала и труда. В качестве капитала обычно выступают производственные фонды, в качестве труда — настоящий живой труд. Выход, или результаты производства, — это, например, валовой внутренний продукт или национальный доход. Выходные характеристики экономической системы являются эффектами. Они, как правило, имеют простую размерность. Например, валовой внутренний продукт или национальный доход измеряются в рублях. Большое значение в экономике имеют также эффективности. *Эффективность* — это отношение выхода к входу. Эффективности, в отличие от эффектов, имеют сложные размерности. Примеры таких размерностей приведены в § 3.5 настоящей главы.

Производственная функция Y в общем виде может быть записана в виде

$$Y = F\left(X, a\right) = F\left(X_1, ..., X_n, a_1, ..., a_m\right),$$

где X — вектор ресурсов; a — вектор параметров производственной функции; n — количество переменных, равное количеству типов ресурсов; m — количество параметров производственной функции.

Такую функцию называют многоресурсной или многофакторной. В качестве ресурсов чаще всего используют труд и капитал. Под *трудом* обычно понимается живой труд, или количество работающих в экономике людей. *Капитал* — деньги, овеществленные в основных средствах. В качестве параметров обычно используются эластичности выпуска по труду и капиталу.

Помимо использования в макроэкономике производственные функции широко используются при анализе, планировании и прогнозировании работы предприятия, отрасли, межотраслевых производственных комплексов, а также хозяйственной системы региона. При анализе работы фирмы используются микроэкономические производственные функции. В этом случае можно исследовать, например, взаимосвязь между величиной затрачиваемого в течение года ресурса и годовым выпуском продукции предприятия.

На микроэкономическом уровне ресурсы и выпуск могут измеряться как в натуральных, так и в стоимостных показателях. На макроэкономическом уровне ресурсы и выпуск измеряются в стоимостных показателях. Стоимостные показатели исчисляются обычно в неизменных, а не в текущих ценах.

▷ **Пример 3.1.** Для производственной функции объема выпускаемой продукции предприятия $y = at^b$ поостроить график этой функции, найти первую и вторую производные и пояснить их экономический смысл. Здесь $t \geq 0$ — величина затраченного рабочего времени, параметры a и b — неотрицательные величины, причем $b < 1$.

Р е ш е н и е. График выпуска y от затраченного рабочего времени x представлен на рис. 3.1.

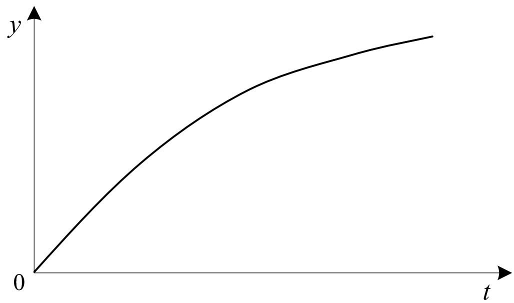


Рис. 3.1. **Производственная функция**

Первая производная от производственной функции имеет вид:

$$\frac{dy}{dt} = abt^{b-1}.$$

Поскольку t, a и b — неотрицательные величины, то первая производная больше нуля во всех точках $t > 0$. Отсюда следует, что выпуск будет увеличиваться при увеличении затраченного рабочего времени.

Вторая производная от производственной функции

$$\frac{d^2y}{dt^2} = ab(b-1)t^{b-2}.$$

Так как $(b-1) < 0$, то вторая производная отрицательна во всех точках $t > 0$. А это значит, что при увеличении затраченного рабочего времени скорость роста выпуска замедляется. ◄

Производственная функция называется *статической*, если ее переменные не зависят от времени.

Производственная функция называется *динамической*, если ее переменные зависят от времени и могут быть взаимосвязаны во времени.

При построении производственной функции на макроэкономическом уровне выпуском Y чаще всего обозначают либо валовой выпуск, либо валовой внутренний продукт, либо национальный доход.

В качестве ресурсов наиболее часто рассматриваются накопленный труд в виде производственных фондов (капитала) K и настоящий живой труд L.

Таким образом, экономика в целом или ее подсистема могут быть представлены моделью в виде нелинейной производственной функции:

$$Y = F(K, L).$$

3.2. Свойства макроэкономической производственной функции

Свойства производственных функций вытекают из естественных требований к современному производству. Рассмотрим основные свойства.

1. Производство невозможно, если отсутствует хотя бы один из ресурсов K или L, т.е. если в производственную функцию вместо одного из ресурсов подставить ноль, то функция будет равна нулю:

$$F(0, L) = F(K, 0) = 0.$$

2. При увеличении роста любого из ресурсов выпуск растет. А это значит, что если первая частная производная функции в области ее определения по любому из ресурсов больше нуля, то функция растет:

$$\frac{\partial F}{\partial K} > 0; \quad \frac{\partial F}{\partial L} > 0 .$$

3. При увеличении роста любого из ресурсов скорость роста выпуска замедляется. А это значит, что если вторая частная производная функции в области ее определения по любому из ресурсов меньше нуля, то рост функции замедляется:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0 .$$

4. Производственный выпуск неограниченно растет при неограниченном увеличении одного из ресурсов, т.е. если один из аргументов стремится к бесконечности, то к бесконечности стремится производственная функция:

$$F(+\infty, L) = +\infty; \quad F(K, +\infty) = +\infty .$$

3.3. Мультипликативная макроэкономическая производственная функция

Для решения и анализа задач экономики часто используют мультипликативную (от *лат.* — умножаю, увеличиваю) производственную функцию. Мультипликативная функция имеет вид:

$$Y = AK^{a_1}L^{a_2},$$

где A — коэффициент технического прогресса; a_1 и a_2 — показатели степени.

Позже покажем, что эти показатели являются эластичностями по труду и фондам.

Частным случаем мультипликативной производственной функции является функция Кобба—Дугласа, у которой $a_1 = \alpha$ и $a_2 = 1 - \alpha$.

Таким образом, функция Кобба—Дугласа может быть записана следующим образом:

$$Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}, \tag{3.1}$$

где $A > 0$; $0 < \alpha < 1$; $K > 0$; $L > 0$.

Проведем анализ функции Кобба—Дугласа **(3.1)** на предмет ее соответствия свойствам, приведенным в § 3.2.

Положив в производственной функции $K = 0$ или $L = 0$, видим, что исследуемая производственная функция равна нулю, т.е. выполняется **свойство 1**, утверждающее, что при отсутствии одного из ресурсов производство невозможно.

Найдем выражение для первой частной производной производственной функции по капиталу:

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = A \cdot \alpha \cdot K^{\alpha-1}L^{1-\alpha} = \frac{A \cdot \alpha \cdot K^{\alpha}L^{1-\alpha}}{K} = \alpha\frac{Y}{K}.$$

Найдем выражение для первой частной производной производственной функции по труду:

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = A \cdot (1-\alpha) \cdot K^{\alpha}L^{-\alpha} = \frac{A \cdot (1-\alpha) \cdot K^{\alpha}L^{1-\alpha}}{L} = (1-\alpha)\frac{Y}{L}.$$

Поскольку первые частные производные положительны, то исследуемая функция возрастающая, т.е. выполняется **свойство 2**.

Найдем выражение для второй частной производной производственной функции по капиталу:

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial K^2} = A \cdot \alpha \cdot (\alpha - 1) K\alpha^{\alpha-2} L^{1-\alpha} = \frac{A \cdot \alpha (1-\alpha) \cdot K^{\alpha} L^{1-\alpha}}{K^2} =$$

$$= \alpha(\alpha-1)\frac{Y}{K^2} = -\alpha(1-\alpha)\frac{Y}{K^2}.$$

Найдем выражение для второй частной производной производственной функции по труду:

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial L^2} = -A \cdot \alpha \cdot (1-\alpha) \cdot K^{\alpha} L^{-\alpha-1} = -\frac{A \cdot \alpha \cdot (1-\alpha) \cdot K^{\alpha} L^{1-\alpha}}{L^2} = -\alpha(1-\alpha)\frac{Y}{L^2}.$$

Так как вторые частные производные отрицательны, то с ростом ресурсов скорость роста выпуска замедляется. Следовательно, выполняется **свойство 3**.

При неограниченном увеличении одного из ресурсов выпуск неограниченно растет, так как выполняется условие:

$$\lim_{K\to\infty} AK^{\alpha}L^{1-\alpha} = \infty; \quad \lim_{L\to\infty} AK^{\alpha}L^{1-\alpha} = \infty.$$

Таким образом, выполняется **свойство 4**.

Приравнивая первые производные от производственной функции нулю и решая эти уравнения, получим решения $L=0$ и $K=0$. В этих точках функция обращается в ноль. Других корней эти уравнения не имеют. Поэтому максимума для всех точек (K, L), для которых исследуемая функция определена, у нее нет.

Одним из методов исследования функции нескольких переменных является определение линий уровня. *Линией уровня* функции $Y = F(K, L)$ называется множество всех точек (x, y), в которых функция принимает постоянное значение B. Для мультипликативной производственной функции уравнение для линий уровня имеет вид:

$$B = AK^{a_1}L^{a_2},$$

где B — постоянная величина.

Из этого соотношения можно найти формулу для связи капитала и труда:

$$K^{a_1} = \frac{B/A}{L^{a_2}}. \tag{3.2}$$

Получили уравнение для степенной гиперболы.

Если, например, $a_1 = a_2 = a = 0,5$, то $B = AK^{0,5}L^{0,5}$, или $B^2 = A^2 \cdot K \cdot L$, или $\frac{B^2}{A^2} = K \cdot L$. Отсюда следует, что линиями уровней будут равнобочные гиперболы:

$$K = \frac{(B/A)^2}{L}.$$

▷ **Пример 3.2.** Показать, что функция Кобба—Дугласа **(3.1)** является однородной первой степени.

Решение. Напомним, что функция $f(x, y)$ называется однородной, если выполняется условие $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda f(x, y)$. Для функции Кобба—Дугласа можно записать $A(\lambda K)^{\alpha}(\lambda L)^{1-\alpha} = A\lambda^{\alpha}K^{\alpha}\lambda^{1-\alpha}L^{1-\alpha} = A\lambda K^{\alpha}L^{1-\alpha}$. Отсюда видно, что функция Кобба—Дугласа является однородной первой степени. ◀

Экономический смысл однородности производственной функции состоит в том, что при увеличении ресурсов в λ раз выпуск также увеличивается в λ раз.

3.4. Построение производственной функции

Построить производственную функцию для исследуемой экономики можно, используя статистические данные основных показателей этой экономики. Общий заданный период времени обозначим T. Этот период состоит из T элементарных периодов, номер которых будем обозначать t. Мультипликативная производственная функция для конкретной экономики для длины временно́го ряда T определяется выпуском и затратами ресурсов для заданных моментов времени этого ряда t. Значения t изменяются от 1 до T.

Для рассматриваемого случая составляется T уравнений вида [2]:

$$Y_t = \delta_t \cdot A \cdot K_t^{a_1} \cdot L_t^{a_2} ,$$

где δ_t — корректировочный случайный коэффициент, который отражает флюктуацию результата под воздействием случайных факторов. Его математическое ожидание равно единице.

Прологарифмировав каждое из полученных уравнений, найдем

$$\ln Y_t = \ln \delta_t + \ln A + a_1 \ln K_t + a_2 \ln L_t.$$

Здесь математическое ожидание случайной величины $\varepsilon_t = \ln \delta_t$ равно нулю. Получили модель линейной множественной регрессии. Показатели K_t и L_t за различные периоды t известны из статистической отчетности. Параметры A, a_1, a_2 могут быть определены по методу наименьших квадратов. После проведения соответствующих вычислений получают параметры производственной функции конкретной экономики.

В работе [3] этот метод был использован для расчета параметров производственной функции Российской Федерации с 1960 по 1991 г. При этом использовалась трехсекторная модель экономики. Эти секторы были названы нулевым сектором, первым сектором и вторым сектором.

Нулевой сектор — материальный сектор, или сектор производственных материальных затрат, куда относились предметы труда, а именно топливо, электроэнергия, сырье и другие материалы.

Первый сектор — фондосоздающий сектор, куда относились средства труда, а именно производственные здания, сооружения, машины, оборудование.

Второй сектор — потребительский сектор, куда относились предметы непроизводственного потребления.

В [3] приведены следующие производственные функции Кобба—Дугласа для трех секторов (индексом обозначен номер сектора):

$$\left.\begin{aligned} Y_0 &= 6{,}19 \cdot K_0^{0{,}46} \cdot L_0^{0{,}54}, \\ Y_1 &= 1{,}35 \cdot K_1^{0{,}68} \cdot L_1^{0{,}32}, \\ Y_2 &= 2{,}71 \cdot K_2^{0{,}49} \cdot L_2^{0{,}51}. \end{aligned}\right\} \qquad \mathbf{(3.3)}$$

Заметим, что для показателей степени выполняются соотношения

$$\alpha_0 < \alpha_1, \quad \alpha_0 < \alpha_2. \qquad \mathbf{(3.4)}$$

3.5. Основные характеристики макроэкономической производственной функции

Найдем эластичности мультипликативной производственной функции $Y = AK^{a_1}L^{a_2}$. Известно, что эластичность выпуска по основным фондам определяется по формуле

$$E_K(Y) = \frac{\partial Y}{\partial K}\frac{K}{Y} = Aa_1K^{a_1-1}L^{a_2}\frac{K}{Y} = a_1\frac{Y}{K}\frac{K}{Y} = a_1.$$

Таким образом, показатель степени a_1 является эластичностью выпуска по основным фондам. Аналогично, показатель степени a_2 — эластичность выпуска по труду, т.е.

$$E_L(Y) = \frac{\partial Y}{\partial L}\frac{L}{Y} = Aa_2K^{a_1}L^{a_2-1}\frac{L}{Y} = a_2\frac{Y}{L}\frac{L}{Y} = a_2.$$

Рассмотрим производственные функции **(3.3)** с точки зрения эластичности. Эластичность показывает, на сколько процентов изменится функция при изменении аргумента на 1%. В сырьевой отрасли, показатели которой имеют индекс 0, эластичность выпуска по основным фондам $\alpha_0 = 0,46$. Это значит, что при увеличении основных фондов этой отрасли на 1% выпуск этой отрасли изменится на 0,46%. Соответственно в фондосоздающем секторе при изменении основных фондов на 1% выпуск изменится на 0,68%, а в потребительском секторе — на 0,49%. Полученные соотношения, связанные с превышением эластичности обрабатывающих отраслей по сравнению с эластичностью сырьевой отрасли, характерны также для других стран. Поэтому относительный прирост основных фондов в обрабатывающих отраслях приводит к большему выпуску по сравнению с сырьевыми отраслями. Это говорит о том, что выгоднее развивать обрабатывающие отрасли, а не сырьевые. Это особенно проявляется в условиях глобализации. В частности, по этой причине России необходимо переходить к развитию и внедрению новых передовых технологий по качественной переработке сырья и выпуску новых товаров.

При $a_1 > a_2$ имеет место трудосберегающий (интенсивный) рост, при $a_1 < a_2$ — фондосберегающий (экстенсивный) рост.

При $a_1 + a_2 > 1$ мультипликативная производственная функция описывает растущую экономику.

Действительно, разделим выпуск в году под номером $t+1$, равный $Y_{t+1} = A \cdot K_{t+1}^{a_1} \cdot L_{t+1}^{a_2}$, на выпуск в году под номером t, равный $Y_t = A \cdot K_t^{a_1} \cdot L_t^{a_2}$. В результате получим темп роста выпуска, который определяется соотношением

$$\frac{Y_{t+1}}{Y_t} = \left(\frac{K_{t+1}}{K_t}\right)^{a_1} \left(\frac{L_{t+1}}{L_t}\right)^{a_2}.$$

Возведем правую и левую части этого соотношения в степень $\frac{1}{a_1 + a_2}$. В результате получим формулу

$$\left(\frac{Y_{t+1}}{Y_t}\right)^{\frac{1}{a_1+a_2}} = \left(\frac{K_{t+1}}{K_t}\right)^{a} \left(\frac{L_{t+1}}{L_t}\right)^{1-a}, \qquad \mathbf{(3.5)}$$

где $a = \frac{a_1}{a_1 + a_2}$; $1 - a = 1 - \frac{a_1}{a_1 + a_2} = \frac{a_2}{a_1 + a_2}$. Эти величины называются *относительными эластичностями*.

Величина, представленная формулой **(3.5)**, называется средневзвешенным геометрическим темпом роста затрат капитала и труда с весами a и $1-a$. Покажем, что темп роста выпуска больше, чем средневзвешенный темп роста факторов при выполнении условия $a_1 + a_2 > 1$.

Как следует из второго свойства производственных функций, если факторы растут, т.е. $\frac{K_{t+1}}{K_t} > 1$ и $\frac{L_{t+1}}{L_t} > 1$, то растет и выпуск, т.е. $Y_{t+1} > Y_t$. Если $a_1 + a_2 > 1$, то можно записать неравенство

$$\frac{Y_{t+1}}{Y_t} > \left(\frac{Y_{t+1}}{Y_t}\right)^{\frac{1}{a_1+a_2}} \text{ и } \frac{Y_{t+1}}{Y_t} > \left(\frac{K_{t+1}}{K_t}\right)^{a} \left(\frac{L_{t+1}}{L_t}\right)^{1-a}.$$

Из последнего соотношения следует, что темп роста выпуска при $a_1 + a_2 > 1$ больше, чем средний темп роста факторов, что и требовалось доказать.

Производственная функция характеризуется следующими понятиями:

$\frac{Y}{L}$ — отношение выпуска к труду называется производительностью, или эффективностью, труда;

$\frac{L}{Y}$ — отношение труда к выпуску называется трудоемкостью;

$\frac{Y}{K}$ — отношение выпуска к капиталу называется капиталоотдачей, или фондоотдачей (производительностью, или эффективностью, капитала или фондов);

$\frac{K}{Y}$ — отношение капитала к выпуску называется капиталоемкостью, или фондоемкостью;

$\frac{K}{L}$ — отношение капитала к труду называется капиталовооруженностью, или фондовооруженностью, труда;

$\frac{\partial Y}{\partial L}$ — первая производная выпуска по труду называется предельной производительностью труда;

$\frac{\partial Y}{\partial K}$ — первая производная выпуска по капиталу называется предельной капиталоотдачей, или предельной фондоотдачей.

Рассмотрим размерности некоторых приведенных показателей. Например, *производительностью* называют отношение выпуска к труду. Выпуск измеряется в $\frac{\text{млрд руб.}}{\text{год}}$, а труд — в млрд человек. Поэтому размерностью производительности является отношение $\frac{\text{руб.}}{\text{человек} \cdot \text{год}}$.

Фондоотдача — это отношение выпуска к капиталу. Размерность выпуска только что рассмотрена, а размерность капитала — млрд руб. Поэтому размерностью фондоотдачи является $\frac{1}{\text{год}}$.

Разделим правую и левую части функции Кобба—Дугласа на величину труда L. В результате получим

$$\breve{Y} = AK^{\alpha}L^{-\alpha} = A\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha} = A\breve{K}^{\alpha},$$

где $\breve{Y} = \dfrac{Y}{L}$ — производительность, или эффективность, труда; $\breve{K} = \dfrac{K}{L}$ — фондовооруженность труда.

Таким образом, получили другой вид производственной функции: производительность труда от одной переменной, а именно от фондовооруженности труда.

3.6. Изокванты и изоклинали

Изоквантой называется линия уровня в системе координат $L0K$. Функция изокванты определяется уравнением $F(K, L) = B = \text{const}$. Для мультипликативной производственной функции это уравнение **(3.2)**.

На изокванте выпуск равен одному и тому же значению при различных значениях капитала K и труда L. Отсюда следует возможность взаимозаменяемости ресурсов.

Так как на изокванте $F(K, L) = B = \text{const}$, то дифференциал dF при перемещении по этой изокванте равен нулю, т.е.

$$dF = \frac{\partial F}{\partial K}dK + \frac{\partial F}{\partial L}dL = 0.$$

Так как по второму свойству производственной функции

$$\frac{\partial F}{\partial K} > 0; \quad \frac{\partial F}{\partial L} > 0,$$

то дифференциалы dK и dL имеют разные знаки.

Предельной нормой замены труда капиталом (фондами) S_K называется *общая производная от капитала по труду*. Поскольку дифференциалы dK и dL имеют разные знаки, то эта производная отрицательная. Поэтому для удобства перед этой производной пишут знак «−», т.е. так, как показано ниже,

$$S_K = -\frac{dK}{dL} = \frac{\partial F / \partial L}{\partial F / \partial K}. \qquad \textbf{(3.6)}$$

Аналогично находят предельную норму S_L замены капитала (фондов) трудом как общую производную от труда по капиталу со знаком «–»:

$$S_L = -\frac{dL}{dK} = \frac{\partial F / \partial K}{\partial F / \partial L}. \qquad \textbf{(3.7)}$$

Из двух последних формул видно, что $S_K S_L = 1$, т.е. произведение предельной нормы замены труда капиталом и предельной нормы замены капитала трудом равно единице.

Для мультипликативной производственной функции имеем следующие значения для предельной фондоотдачи и предельной производительности труда:

$$\frac{\partial F}{\partial K} = \frac{\partial\left(AK^{a_1}L^{a_2}\right)}{\partial K} = a_1\frac{AK^{a_1}L^{a_2}}{K} = a_1\frac{Y}{K}, \ \ \frac{\partial F}{\partial L} = a_2\frac{Y}{L}.$$

Отсюда следует, что предельную норму S_K замены труда капиталом и предельную норму S_L замены капитала трудом находят по формулам

$$S_K = \frac{\partial F / \partial L}{\partial F / \partial K} = \frac{a_2}{a_1}\frac{K}{L}; \quad S_L = \frac{\partial F / \partial K}{\partial F / \partial L} = \frac{a_1}{a_2}\frac{L}{K}.$$

▷ **Пример 3.3.** Для мультипликативной производственной функция $Y = AK^{a_1}L^{a_2}$ найти эластичности замещения фондов трудовыми ресурсами и трудовых ресурсов фондами.

Р е ш е н и е. Эластичность замещения фондов трудовыми ресурсами находят по формуле

$$E_L\left(K\right) = \frac{dK}{dL}\cdot\frac{L}{K}.$$

С учетом **(3.6)** эту формулу можно записать в виде:

$$E_L\left(K\right) = -\frac{\partial F / \partial L}{\partial F / \partial K}\cdot\frac{L}{K} = -\frac{a_2}{a_1}\frac{K}{L}\cdot\frac{L}{K} = -\frac{a_2}{a_1}.$$

Эластичность замещения трудовых ресурсов фондами с учетом **(3.7)** определяется соотношением

$$E_K(L) = \frac{\partial L}{\partial K} \cdot \frac{K}{L} = -\frac{\partial F/\partial K}{\partial F/\partial L} \cdot \frac{K}{L} = -\frac{a_1}{a_2}\frac{L}{K} \cdot \frac{K}{L} = -\frac{a_1}{a_2}.$$

Знак «–» перед эластичностями означает, что функция $K(L)$ является убывающей. Например, для эластичности замещения фондов трудовыми ресурсами при возрастании трудовых ресурсов на 1% фонды сократятся на $\frac{a_2}{a_1}$%. Следует иметь в виду, что выпуск при этом не изменяется. ◀

Изоклиналью называется линия наибольшего роста производственной функции. Изоклиналь является линией, в каждой точке которой касательной является направление градиента функции $Y = F(K, L)$. Градиентом функции является вектор, имеющий вид:

$$\operatorname{grad} F = \frac{\partial F}{\partial L}\bar{i} + \frac{\partial F}{\partial K}\bar{j},$$

где $\bar{i}$ и $\bar{j}$ — орты осей $0L$ и $0K$ соответственно; $\frac{\partial F}{\partial L}$ и $\frac{\partial F}{\partial K}$ — проекции градиента на эти оси.

Можно показать, что градиент ортогонален линиям уровня. Поэтому изоклинали ортогональны изоквантам. На рис. 3.2 показан график изоклинали и градиент функции $Y = F(K, L)$.

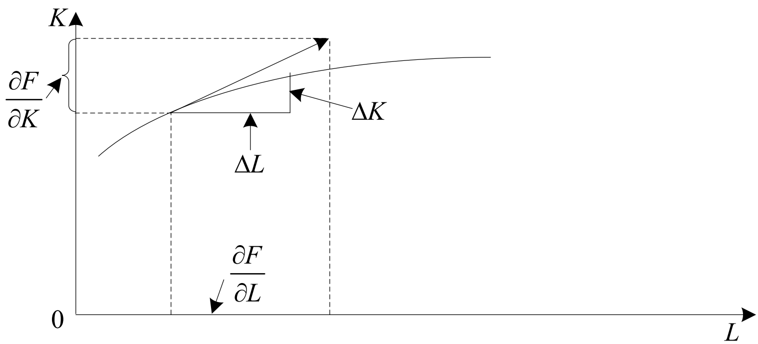


Рис. 3.2. **График изоклинали и градиент функции**

Из геометрии этого графика следует соотношение

$$\frac{\Delta K}{\Delta L} \approx \frac{\partial F/\partial K}{\partial F/\partial L}.$$

Переходя к дифференциалам и произведя необходимые преобразования, получим уравнение для изоклинали:

$$\frac{dK}{\partial F/\partial K} = \frac{dL}{\partial F/\partial L}.$$

Для мультипликативной производственной функции уравнение изоклинали имеет вид:

$$\frac{KdK}{a_1} = \frac{LdL}{a_2}.$$

Решение этого дифференциального уравнения можно представить в виде:

$$\frac{K^2}{a_1} = \frac{L^2}{a_2} + C, \qquad \textbf{(3.8)}$$

где C — постоянная интегрирования.

При прохождении изоклинали через любую точку с координатами (K_0, L_0) постоянная интегрирования определяется формулой

$$C = \frac{K_0^2}{a_1} - \frac{L_0^2}{a_2}.$$

Подставив последнюю формулу в **(3.8)**, получим выражение для функции изоклинали

$$K = \sqrt{\frac{a_1}{a_2}\left(L^2 - L_0^2\right) + K_0^2}.$$

Изоклиналь, проходящая через начало координат, определяется формулой

$$K = L\sqrt{\frac{a_1}{a_2}},$$

т.е. является прямой линией с тангенсом угла наклона, равным $\sqrt{\frac{a_1}{a_2}}$.

Пример графиков изоквант и изоклиналей показан на рис. 3.3.

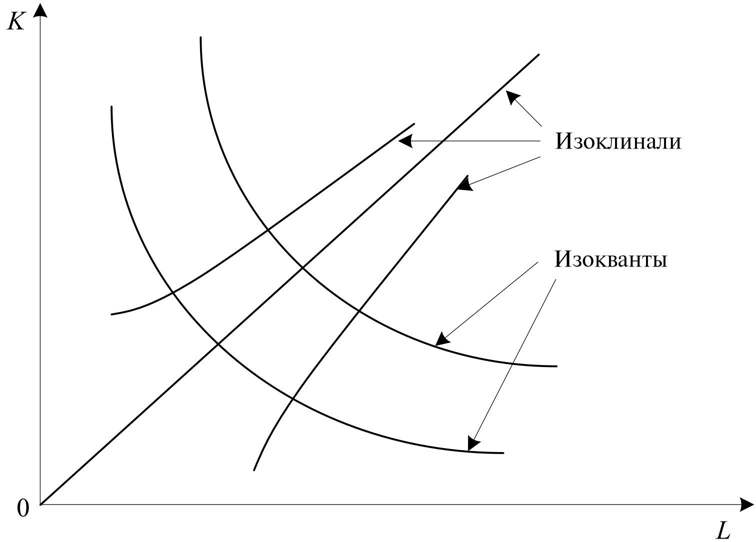


Рис. 3.3. **Графики изоквант и изоклиналей**

3.7. Эффективность и масштаб производства

Определим эффективность и масштаб производства с помощью производственной функции. Для этих целей мультипликативную производственную функцию представим в относительных величинах:

$$\frac{Y}{Y_0} = \left(\frac{K}{K_0}\right)^{a_1} \cdot \left(\frac{L}{L_0}\right)^{a_2},$$

где Y_0, K_0 и L_0 — выпуск, затраты капитала и труда в базовый год.

Приведем это выражение к виду:

$$Y = \frac{Y_0}{K_0^{a_1} L_0^{a_2}} K^{a_1} L^{a_2} = AK^{a_1} L^{a_2}.$$

Отсюда следует, что коэффициент $A = \dfrac{Y_0}{K_0^{a_1} \cdot L_0^{a_2}}$ является отношением выпуска к ресурсам в базовом году.

Безразмерные величины обозначим следующим образом:

$$y = \frac{Y}{Y_0}; \quad k = \frac{K}{K_0}; \quad l = \frac{L}{L_0}.$$

Тогда формулу в относительных, или безразмерных, величинах можно записать в виде:

$$y = k^{a_1} \cdot l^{a_2}.$$

Выше были введены эффективности труда Y/L и капитала Y/K, являющиеся отношением выхода к соответствующим входам, или затратам. В безразмерных величинах эти эффективности приобретают форму: y/l — безразмерная эффективность труда, y/k — безразмерная эффективность капитала. Подставив в отношения для безразмерных эффективностей значения для y, k, l, получим

$$\frac{y}{l} = \frac{Y/L}{Y_0/L_0}; \ \frac{y}{k} = \frac{Y/K}{Y_0/K_0}.$$

Из этих формул видно, что безразмерная эффективность труда и безразмерная эффективность капитала показывают, во сколько раз изменились эффективность труда и эффективность капитала по сравнению с базовым годом.

Безразмерная эффективность труда и безразмерная эффективность капитала используются для конструирования интегрального показателя экономической эффективности как средневзвешенной геометрической величины с весами $a = \frac{a_1}{a_1 + a_2}$ и $1 - a = \frac{a_2}{a_1 + a_2}$. Этот показатель вычисляется по формуле

$$E = \left(\frac{y}{k}\right)^a \cdot \left(\frac{y}{l}\right)^{1-a}.$$

Разделив y на левую и правую части последнего соотношения, получим формулу

$$\frac{y}{E} = \frac{y}{\left(\frac{y}{k}\right)^a \cdot \left(\frac{y}{l}\right)^{1-a}} = \frac{y \cdot k^a \cdot l^{1-a}}{y^a \cdot y^{1-a}} = k^a \cdot l^{1-a}.$$

Отсюда следует формула

$$y = Ek^a l^{1-a}.$$

Таким образом, безразмерный выпуск равен коэффициенту экономической эффективности, умноженному на произведение безразмерного капитала, возведенного в степень относительной эластичности, и безразмерного труда, также возведенного в степень относительной эластичности.

Из сказанного следует, что с помощью коэффициента экономической эффективности E производственная функция преобразована к виду, напоминающему функцию Кобба—Дугласа. При этом надо иметь в виду, что коэффициент экономической эффективности E сам является функцией труда и капитала.

Масштаб производства так же, как и обобщенный показатель экономической эффективности, может быть представлен в виде взвешенного среднего геометрического от использованных ресурсов с весами $a = \frac{a_1}{a_1 + a_2}$, $1 - a = \frac{a_2}{a_1 + a_2}$, т.е. с помощью формулы

$$M = k^a \cdot l^{1-a}.$$

Если перемножить масштаб производства и обобщенный показатель экономической эффективности, то получим

$$M \cdot E = k^a \cdot l^{1-a} \cdot \left(\frac{y}{k}\right)^a \cdot \left(\frac{y}{l}\right)^{1-a} = y^a \cdot y^{1-a}.$$

Таким образом, безразмерный выпуск является произведением обобщенной экономической эффективности и масштаба производства, т.е.

$$y = E \cdot M.$$

▷ **Пример 3.4** [2]. Производственная функция экономики США по данным 1960—1995 гг. имеет вид: $Y = 2,248K^{0,404}L^{0,803}$. С 1960 по 1995 г. валовой внутренний продукт США, измеряемый в млрд долл. в ценах 1987 г., возрос в 2,82 раза, основные производственные фонды — в 2,88 раза, численность занятых — в 1,93 раза.

Определить масштаб и эффективность производства.

Р е ш е н и е. Из условия следует, что относительные показатели имеют следующие значения:

$$y = 2,82; \quad k = 2,88; \quad l = 1,93.$$

Находим относительные эластичности по фондам и труду:

$$a = \frac{a_1}{a_1 + a_2} = \frac{0,404}{0,404 + 0,803} = 0,335; \quad 1 - a = \frac{a_2}{a_1 + a_2} = 0,665\,.$$

Безразмерные эффективности по фондам и труду определяются по формулам

$$\frac{y}{k} = \frac{2,82}{2,88} = 0,98; \quad \frac{y}{l} = \frac{2,82}{1,93} = 1,46\,.$$

Отсюда следует, что эффективность капитала изменилась по сравнению с базовым годом в 0,98 раза, а эффективность труда — в 1,46 раза.

Обобщенный, или интегральный, показатель экономической эффективности, являющийся взвешенным средним геометрическим частных показателей эффективности, определяется по формуле

$$E = \left(\frac{y}{k}\right)^a \cdot \left(\frac{y}{l}\right)^{1-a} = 0,98^{0,335} \cdot\ 1,46^{0,665} = 1,277.$$

Таким образом, обобщенная экономическая эффективность по сравнению с 1960 г. возросла в 1,227 раза.

Масштаб производства, определяемый как обобщенный показатель экономической эффективности в виде взвешенного среднего геометрического от использованных ресурсов, находим по формуле

$$M = k^a \cdot\ l^{1-a} = 2,88^{0,335} \cdot 1,93^{0,665} = 2,207.$$

Масштаб производства возрос по сравнению с базовым годом в 2,207 раза.

Общий рост производства по сравнению с базовым годом находим по формуле

$$y = EM = 1,277 \cdot 2,207 = 2,82.$$

Этот результат можно рассматривать также как проверку, поскольку полученное значение приведено в условии примера.

Таким образом, общий рост в 2,82 раза валового внутреннего продукта США с 1960 по 1995 г. произошел за счет повышения эффективности производства в 1,277 раза и за счет роста масштаба производства в 2,207 раза. ◀

Из сказанного следует, что в производственной функции макроэкономики конкретной страны заложены ее основные экономические характеристики.

Упражнения

Задача 3.1. Для производственной функции экономики Российской Федерации по данным 1960—1994 гг., имеющей вид $Y = 0{,}931K^{0{,}539}L^{0{,}594}$ [2], найти эластичность замещения фондов трудовыми ресурсами и трудовых ресурсов фондами.

Задача 3.2. Выпуск продукции предприятия в течение года составил 8 млрд руб./год. Его основные фонды равны 10 млрд руб. На заводе работало 5 тыс. чел. Было решено увеличить годовой выпуск завода на 0,5 млрд руб. при том же значении основных фондов. Производственной функцией завода является функция Кобба—Дугласа с коэффициентом технического прогресса $A = 1$.

Определить производственную функцию завода и новое количество работников.

Библиографический список

1. *Замков О.О.* и др. Математические методы в экономике. М.: ДиС, 2004.
2. *Колемаев В.А.* Математическая экономика. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005.
3. *Колемаев В.А.* Экономико-математическое моделирование. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005.
4. *Кузнецов Б.Т.* Математика. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004.
5. *Малыхин В.И.* Математическое моделирование экономики. М.: УРАО, 1998.
6. *Экономико-математические* методы и модели / Под ред. А.В. Кузнецова. Минск: БГЭУ, 1999.

Глава 4

Модели потребления

4.1. Кейнсианская модель потребления

В классической экономической теории величина сбережений и инвестиций определяется рыночной процентной ставкой, по которой покупается и продается капитал на финансовом рынке.

Согласно теории Кейнса [1, 3], разработанной и апробированной в 1930-е гг., основным фактором, определяющим динамику потребления и сбережений, является располагаемый доход домашних хозяйств. *Располагаемым* называется доход, который получают после выплаты налогов. Сохраняется та часть располагаемого дохода, которая остается после потребления. Процентная ставка в теории Кейнса играет второстепенную роль. Связь потребительских расходов C и величины сбережений S определяется соотношением

$$C + S = Y - T = Y_d \,, \qquad \textbf{(4.1)}$$

где Y — личный доход; T — прямые налоги; $Y_d = Y - T$ — располагаемый доход.

По Кейнсу, зависимость потребительских расходов от располагаемого дохода можно представить в виде:

$$C = a + bY_d, \tag{4.2}$$

где a — автономное потребление, не зависящее от размеров располагаемого дохода и характеризующее минимальный уровень этого потребления, необходимый людям; b — предельная склонность к потреблению.

Источниками автономного потребления служат богатство, или ранее накопленное имущество, а также кредит.

Формулу для *предельной склонности к потреблению* можно получить, продифференцировав **(4.2)** по величине располагаемого дохода Y_d:

$$b = \frac{dC}{dY_d} \approx \frac{\Delta C}{\Delta Y_d}.$$

Отсюда следует, что предельная склонность к потреблению равна отношению прироста потребительских расходов ΔC к приросту располагаемого дохода ΔY_d.

Средняя склонность к потреблению — это доля потребительских расходов от всего располагаемого дохода:

$$\overline{b} = \frac{C}{Y_d}.$$

Зависимость величины сбережения от располагаемого дохода найдем из соотношений **(4.1)** и **(4.2)**:

$$S = Y_d - C = Y_d - a - bY_d = -a + (1-b)Y_d. \tag{4.3}$$

Формулу для *предельной склонности к сбережению* можно получить так же, как и формулу для предельной склонности к потреблению:

$$k = 1 - b = \frac{dS}{dY_d} \approx \frac{\Delta S}{\Delta Y_d}.$$

Таким образом, предельная склонность к сбережению равна отношению прироста сбережений ΔS к приросту располагаемого дохода ΔY_d.

Из полученных формул для предельной склонности к потреблению и предельной склонности к сбережению следует, что сумма этих двух величин равна единице.

Средняя склонность к сбережению — это доля величины сбережения от всего располагаемого дохода:

$$\bar{k} = \frac{S}{Y_d}.$$

Ясно, что $\bar{b} + \bar{k} = 1$.

Графическая зависимость потребительских расходов $C = a + bY_d$ от располагаемого дохода представлена на рис. 4.1. На этом же графике приведена прямая $C = Y_d$. Разность $Y_d = C$, т.е. разность между ординатами двух функций $C = Y_d$ и $C = a + bY_d$, является функцией сбережения $S = -a + (1-b)Y_d$. Эта функция также представлена на рис. 4.1.

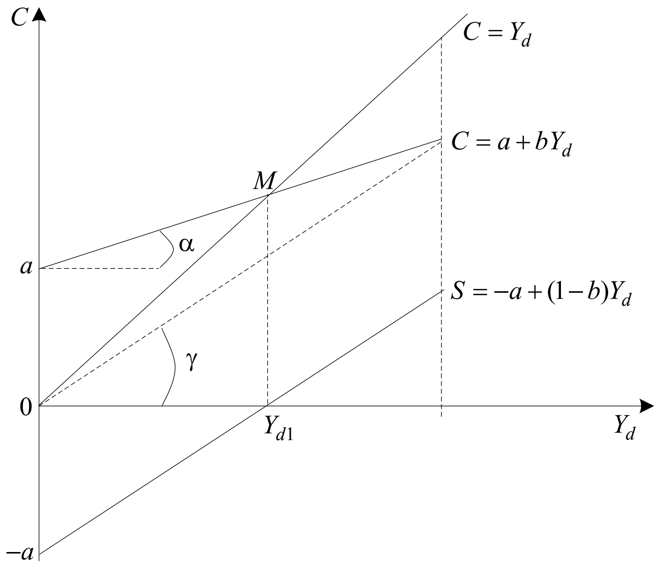


Рис. 4.1. **Функция потребления и сбережения**

Из геометрии рис. 4.1 следует, что при располагаемом доходе $Y_d < Y_{d1}$ функция сбережения будет отрицательной. Из этого следует, что полученного располагаемого дохода не хватает для потребления, предусмотренного функцией потребления **(4.2)**. Потребление происходит за счет накопленного имущества. В точке M, где функция сбережения и функция $C = Y_d$ пересекаются, потребление будет равно располагаемому доходу. Правее этой точки при $Y_d > Y_{d1}$ функция сбережения будет положительной, т.е. от полученного располагаемого дохода после потребления часть этого дохода останется в виде сбережений.

Опыт показал, что кейнсианская модель потребления справедлива для краткосрочного периода. Например, в ФРГ с 1985 по 1990 г. модель потребления имела вид [9] (млрд марок): $C = 280 + 0,63Y$. Предельная склонность к потреблению для этого случая равна: $b = \frac{dC}{dY} = \operatorname{tg}\alpha = 0,63$. Средняя же склонность к потреблению определяется соотношением

$$\bar{b} = \frac{C}{Y} = \operatorname{tg}\gamma = \frac{280 + 0,63Y}{Y} = 0,63 + \frac{280}{Y}.$$

Из приведенных соотношений следует, что средняя склонность к потреблению всегда больше, чем предельная склонность к потреблению. Средняя склонность к потреблению стремится к предельной склонности к потреблению при $Y \to \infty$. Отсюда следует, что при увеличении дохода средняя склонность к потреблению все меньше и меньше будет отличаться от предельной склонности к потреблению.

С другой стороны, американский экономист С. Кузнец (1901—1985), проведя обработку данных по США за период 1869—1940 гг., пришел к выводу, что по мере роста дохода средняя склонность к потреблению не проявляла тенденции к снижению и оставалась постоянной. С. Кузнец получил следующие результаты после обработки статистических данных [9]:

1869—1898 гг.: средняя склонность к потреблению — 0,867;

1884— 1913 гг.: средняя склонность к потреблению — 0,867;

1904— 1940 гг.: средняя склонность к потреблению — 0,879.

При переходе от периода к периоду доход растет, а средняя склонность к потреблению практически остается постоянной. Из сказанного следует, что функция потребления для долгосрочного периода должна описываться соотношением

$$C = bY.$$

Усовершенствовать модель Кейнса пытались многие ученые, например, Ф. Модильяни, М. Фридмен и др. [3]. Альтернативные модели, в основном, учитывают доходы потребителя как в молодости, так и в старости. Поэтому применять на практике эти модели можно только в странах со стабильной экономикой. Если в стране происходят частые перевороты и затяжные кризисы, то использовать эти модели можно только при определенной осторожности.

4.2. Модель Фишера

По мнению американского экономиста И. Фишера (1867—1947), потребитель принимает потребительские решения исходя из своих настоящих доходов и доходов, которые он получит в будущем. Доход, который потребитель получает в молодости, обозначим Y_1, а в старости — Y_2. Тогда для первого получим соотношение

$$Y_1 = C_1 + S_1 ,$$

где индексы при потребительских расходах C и величине сбережений S означают номер периода. Отсюда следуют формулы для потребления и накопления в первом периоде:

$$C_1 = Y_1 - S_1 ;\ S_1 = Y_1 - C_1 .$$

Во втором периоде человек потребляет весь полученный в этом периоде доход Y_2, а также сбережения, сделанные им в первом периоде:

$$C_2 = Y_2 + S_1 \cdot (1+r) = Y_2 + (Y_1 - C_1) \cdot (1+r) , \qquad \textbf{(4.4)}$$

где r — реальная эффективная (за несколько лет) процентная ставка наращения.

Заметим, что эта ставка отличается от обычной реальной годовой ставки, которая используется в финансовых расчетах. Для связи сложной реальной годовой процентной ставки наращения a и реальной эффективной процентной ставки наращения r можно использовать уравнение эквивалентности:

$$r = (1+a)^n - 1 ,$$

где n — срок наращения в годах.

▷ **Пример 4.1.** Срок наращения в годах — 30 лет, реальная безрисковая годовая процентная ставка наращения, очищенная от инфляции, равна 0,5% годовых. Например, это средняя за 63 года доходность казначейского векселя США.
Определить реальную эффективную процентную ставку наращения.

Р е ш е н и е. $r = (1+0,005)^{30} - 1 = 0,161$, или $16,1\%$. ◀

График зависимости C_1 от C_2 является прямой линией. Прямую линию можно провести по двум точкам, в которых эта линия пересекается с осями $0C_1$ и $0C_2$. С осью $0C_1$ координату точки пересечения можно найти из уравнения:

$$0 = Y_2 + \left(Y_1 - C_1\right) \cdot \left(1 + r\right).$$

Решая это уравнение относительно C_1, найдем

$$C_1 = \frac{Y_2}{1+r} + Y_1.$$

Аналогично находим точку пересечения с осью $0C_2$:

$$C_2 = Y_2 + Y_1 \cdot \left(1 + r\right).$$

Тангенс угла наклона прямой **(4.4)** с осью $0C_1$ равен:

$$\frac{dC_2}{dC_1} = -\left(1 + r\right).$$

С отрицательным направлением оси $0C_1$ этот тангенс равен $\left(1 + r\right)$, т.е. будет положительной величиной.

График исследуемой прямой представлен на рис. 4.2. Эта прямая называется *межвременным бюджетным ограничением потребителя*.

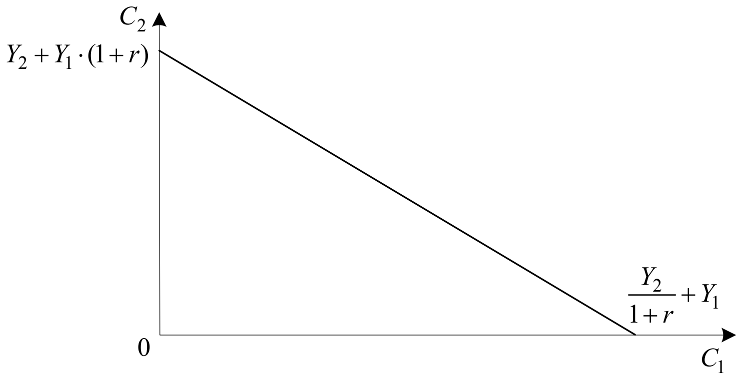


Рис. 4.2. **Межвременное бюджетное ограничение потребителя**

Оптимальное сочетания потребления в молодости и в старости зависит от предпочтений потребителя, которые определяются его линией безразличия. Подробно линии безразличия рассмотрены в § 4.6. Линии безразличия в системе координат $C_1 0 C_2$ выглядят так же, как и линии безразличия, представленные на рис. 4.7, и обладают теми же свойствами. Каждая линия безразличия характеризует одинаковый уровень полезности потребляемых потребителем продуктов в молодости и в старости. Потребители стремятся достичь наиболее высокой кривой потребления. Однако их стремления ограничены межвременным бюджетным ограничением. Это отражено на рис. 4.3.

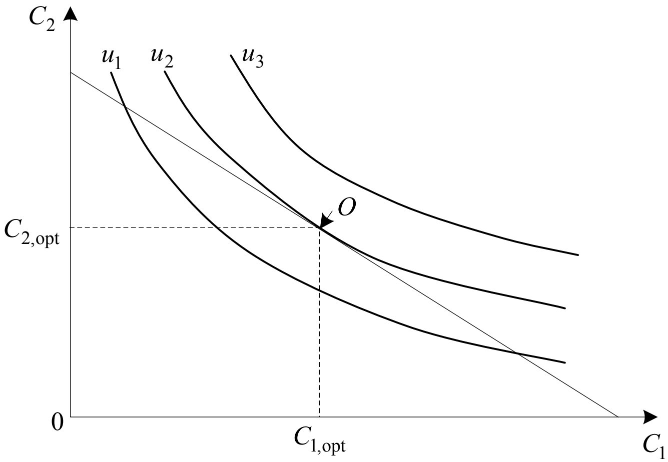


Рис. 4.3. **Оптимальная точка потребления**

Точка касания O прямой межвременного бюджетного ограничения потребителя и одной из линий безразличия является точкой оптимального сочетания потребления в молодости и в старости. Координаты этой точки $C_{1,\text{opt}}$ и $C_{2,\text{opt}}$ являются оптимальным потреблением в первом и во втором периоде соответственно. Тот факт, что эта точка является оптимальной, будет доказан ниже.

Тангенс угла наклона касательной к линии безразличия с осью $0C_1$ в заданной точке называется предельной нормой замещения. В оптимальной точке предельная норма замещения равна $-(1+r)$, так как касательной в этой точке является прямая межвременного бюджетного ограничения потребителя.

Изменение характеристик прямой межвременного бюджетного ограничения потребителя приведет к смещению оптимальной точки потребления в системе координат $C_1 0 C_2$. Например, если доход уменьшится, то прямая межвременного бюджетного ограничения потребителя сместится влево вниз, как показано на рис. 4.4. Видно, что и та и другая координата оптимальной точки потребления уменьшилась.

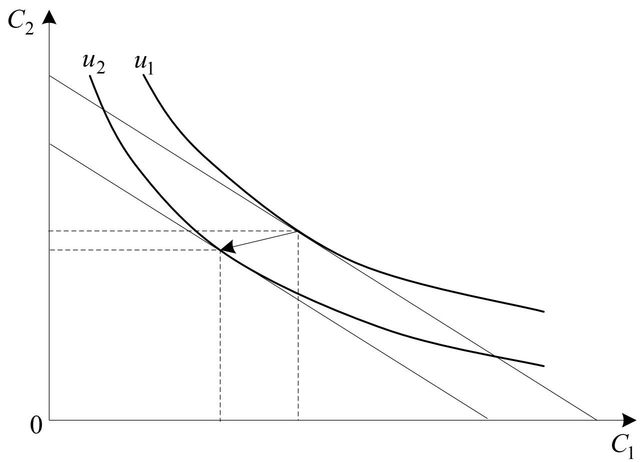


Рис. 4.4. **Изменение положения оптимальной точки потребления при уменьшении дохода**

Другое возможное изменение характеристик прямой межвременного бюджетного ограничения потребителя состоит в изменении реальной эффективной процентной ставки наращения r. Например, если эта ставка увеличится, то угол наклона также увеличится. На рис. 4.5 показано смещение оптимальной точки потребления в системе координат $C_1 0 C_2$ при увеличении реальной эффективной процентной ставки наращения.

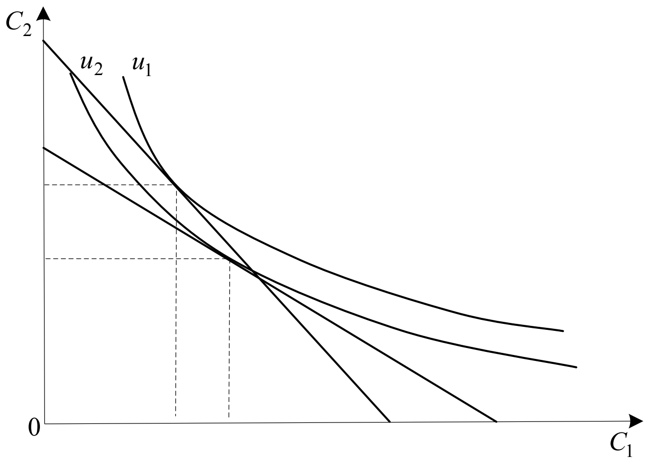


Рис. 4.5. **Изменение положения оптимальной точки потребления при увеличении реальной эффективной процентной ставки наращения**

Из геометрии рис. 4.5 видно, что в этом случае потребление в первом периоде уменьшилось, а во втором увеличилось. Этот результат объясняется тем, что при увеличении реальной эффективной процентной ставки наращения потребитель до наступления второго периода сможет за счет наращения накопить большую сумму.

4.3. Модель Модильяни

В модели Модильяни потребление зависит от ожидаемого дохода на протяжении всей жизни. При этом в молодости люди берут в долг, рассчитывая на более высокие доходы в зрелости. На пенсии потребление обеспечивается накоплениями за предыдущие периоды. По Модильяни, весь ожидаемый за годы жизни доход расходуется равномерно. Поэтому ежегодное потребление может быть определено по формуле

$$C = \frac{W + Y \cdot n}{N},$$

где W — богатство, которым обладает потребитель на момент оценки; Y — ежегодный планируемый доход потребителя во время работы; n — срок в годах, который потребитель планирует проработать до выхода на пенсию; N — срок в годах, который потребитель планирует прожить.

Приведенную формулу можно переписать в виде:

$$C = \frac{1}{N} \cdot W + \frac{n}{N} \cdot Y.$$

По аналогии с этой формулой записывается формула для потребления в объеме макроэкономики:

$$C = \alpha \cdot W + \beta \cdot Y ,$$

где α — предельная склонность к потреблению по накопленному богатству; β — предельная склонность к потреблению по доходу.

Отсюда следует формула для средней склонности к потреблению:

$$\frac{C}{Y} = \alpha \cdot \frac{W}{Y} + \beta.$$

Модель Модильяни не учитывает, что потребитель не расходует всех накопленных средств. Часть средств после его смерти остается в виде наследства. Причины оставления наследства могут быть самыми разными. Это инструмент влияния на детей, непреднамеренность наследства (человеку неизвестен срок его жизни), бескорыстная забота о благе других. Часто богатство наживается не ради будущего потребления, а ради престижа.

4.4. Модель Фридмена

В модели М. Фридмена заложена идея Модильяни о стабильном уровне потребления и идея Фишера о межвременном потребительском выборе. В основе модели Фридмена лежит положение о том, что потребитель формирует свои расходы в зависимости от перманентного дохода.

Под *перманентным доходом* понимают усредненный доход, который домашние хозяйства получают от имущества [9]. Доход, получаемый за счет труда, рассматривается в данном случае как доход от человеческого капитала, являющегося разновидностью имущества.

Перманентный доход $\overline{Y}$ для исследуемого момента времени t связан с фактическим доходом Y следующим соотношением:

$$\overline{Y}_t = \alpha Y_t + \alpha(1-\alpha) Y_{t-1} \alpha(1-\alpha)^2 Y_{t-2} + \ldots + \alpha(1-\alpha)^j Y_{t-j} + \ldots = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha(1-\alpha)^j Y_{t-j},$$

где $j = 0, 1, 2, \ldots;\ 0 < \alpha < 1$.

Из формулы следует, что перманентный доход зависит от всех предшествующих доходов домашних хозяйств. Поскольку обычно реальная история домашних хозяйств является длительной, то для простоты длительность этой истории принята как бесконечность.

Веса при фактических доходах имеют различные значения, причем сумма ряда этих весов равна единице, т.е.

$$\alpha+\alpha(1+\alpha)+\alpha(1+\alpha)^2+\ldots+\alpha(1+\alpha)^j\ldots=\alpha\frac{1}{1-(1-\alpha)}=1,$$

так как эта сумма является бесконечной геометрической прогрессией со знаменателем $1-\alpha$.

Преобразуем формулу Фридмена к виду

$$\overline{Y}_t=\alpha y_t+(1-\alpha)\left[\alpha Y_{t-1}+\alpha(1-\alpha)Y_{t-2}+\alpha(1-\alpha)^2Y_{t-3}+\ldots\right].$$

Выражение в квадратных скобках является перманентным доходом для последнего периода в ряду параметров, т.е. это $\overline{Y}_{t-1}$. Таким образом,

$$\overline{Y}_t=\alpha Y_t+(1-\alpha)\overline{Y}_{t-1}.$$

Из этой формулы следует, что для получения перманентного дохода достаточно задать величину $\overline{Y}_{t-1}$. Дальнейшие расчеты ведутся по поступлении свежих данных.

Чувствительность перманентного дохода может быть изменена путем изменения α: чем выше α, тем выше чувствительность, чем ниже α, тем устойчивее перманентный доход.

Перепишем полученную формулу для перманентного дохода в виде

$$\overline{Y}_t=\overline{Y}_{t-1}+\alpha(Y_t-\overline{Y}_{t-1}).$$

Разность $Y_t-\overline{Y}_{t-1}=\varepsilon_t$ является отклонением перманентного дохода в периоде $t-1$ от реального дохода в периоде t. Тогда

$$\overline{Y}_t=\overline{Y}_{t-1}+\alpha\varepsilon_t.$$

Рассмотренный метод экспоненциально взвешенного среднего используется для исследования стационарных процессов, при которых математическое ожидание параметра постоянно во времени.

▷ **Пример 4.2.** В табл. 4.1 приведены данные по ежегодным фактическим доходам за 10 лет.
Определить перманентный доход на каждый следующий год, положив перманентный доход 1-го года равным 9, $\alpha=0,2$.

Р е ш е н и е. Исходные данные и результаты расчета сведены в табл. 4.1.

Таблица 4.1

Год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y_t	**8,9**	**9,1**	**8,9**	**9,08**	**8,96**	**8,9**	**9,0**	**9,5**	**9,6**	**9,56**
$\overline{Y}_{t-1}$	9,0	8,98	9,0	8,98	9,0	8,99	8,98	8,98	9,08	9,19
$\varepsilon_t = Y_t - \overline{Y}_{t-1}$	−0,1	0,12	−0,1	0,1	−0,04	−0,09	0,02	0,502	0,52	0,37

Графики фактического и перманентного доходов представлены на рис. 4.6. ◀

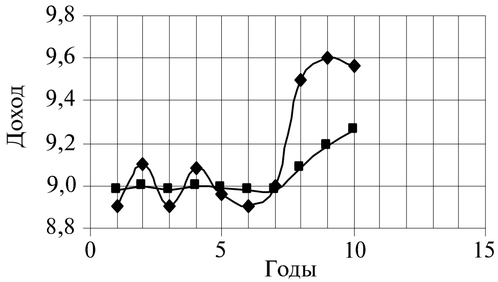


Рис. 4.6. **Фактический и перманентный доходы:**
—◆— — фактический доход; —■— — перманентный доход

Анализ формулы для перманентного дохода и графиков рис. 4.6 позволяют сделать вывод, что перманентный доход — это средний доход от всего полученного дохода. Более того, функция перманентного дохода усредняет все колебания фактического дохода. Поэтому при получении высокого дохода потребитель будет сохранять часть этого дохода, а при снижении дохода потребитель будет расходовать часть из накопленного дохода. Перманентный доход, согласно ожиданиям людей, должен сохраниться в будущем. Потребитель получает этот доход при отсутствии случайных временных факторов, которые могут повысить или понизить доход.

Фактический доход Y в рассматриваемом случае определяется как сумма перманентного дохода $\overline{Y}$ и временного дохода ΔY_t:

$$Y = \overline{Y} + \Delta Y_t.$$

Временный доход потребитель не ожидает сохранить в будущем. Этот доход является случайным отклонением от перманентного дохода. Рассматривают три причины отклонений.

П е р в а я причина связана со случайными отклонениями дохода в первом периоде, или в молодости. Эта причина слабо влияет на потребление, поскольку значительная часть этого дохода направляется на сбережения. Например, при получении наследства потребитель, скорее всего, не потратит сразу полученные деньги, а распределит расходы на длительный период.

Вторую причину называют перманентной. При ней перманентный доход может увеличиться или уменьшиться в течение первого или второго периода. Это может произойти, например, при значительном повышении заработной платы на длительное время.

Третья причина связана с ожиданиями в будущем. Например, если потребитель ожидает повышения дохода в будущем, он будет использовать на потребление заемные средства, а если он ожидает понижения дохода в будущем, он начнет сберегать часть дохода, получаемого в текущем времени.

В модели Фридмена потребление определяется соотношением

$$C = \vartheta \cdot \overline{Y},$$

где ϑ — постоянный коэффициент.

Эта формула отличается от модели Кейнса **(4.2)** на величину автономного потребления a.

Средняя склонность к потреблению в модели Фридмена определяется по формуле

$$\frac{C}{Y} = \frac{\vartheta \cdot \overline{Y}}{Y}.$$

Из этой формулы видно, что средняя склонность к потреблению зависит от отношения перманентного дохода к текущему доходу, т.е. годы высокого дохода характеризуются низкой склонность к потреблению, а годы низкого дохода — высокой склонностью к потреблению.

4.5. Функция полезности

Пусть потребитель располагает некоторой суммой средств, которые он полностью тратит на приобретение и потребление набора товаров. Этот набор товаров потребитель покупает, исходя из имеющихся средств и собственных предпочтений. Модель поведения такого потребителя называется *моделью потребительского выбора.*

Рассмотрим потребительский набор из двух товаров (x, y), где x и y — количество единиц первого и второго товара соответственно. Потребительский набор — это точка в системе прямоугольных координат $x0y$ с координатами (x, y). Потребитель из каждых двух наборов $A = (x_a, y_a)$ и $B = (x_b, y_b)$ либо не видит между ними разницы, либо отдает предпочтение какому-то из них. Отношение потребителя к возможным наборам товаров называется *выбором потребителя*. Если каждому набору (x, y) поставить в соответствие потребительскую оценку этого набора в виде некоторого числа u, то получим функцию полезности потребителя $u(x, y)$. Если набор $A = (x_a, y_a)$ предпочтительнее набора $B = (x_b, y_b)$, то $u(A) > u(B)$. Каждый потребитель имеет свою функцию полезности.

Функция полезности обладает следующими свойствами.

1. Возрастание потребления одного продукта при постоянном потреблении другого приводит к росту потребительской оценки, т.е.

при $x_1 > x$ имеем $u(x_1, y) > u(x, y)$;

при $y_1 > y$ имеем $u(x, y_1) > u(x, y)$.

Отсюда следует

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} > 0; \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} > 0.$$

Первые частные производные от функции полезности потребителя называются *предельными полезностями* соответствующих продуктов:

$\dfrac{\partial u(x, y)}{\partial x}$ — предельная полезность первого продукта;

$\dfrac{\partial u(x, y)}{\partial y}$ — предельная полезность второго продукта.

Для предельных полезностей первого и второго продукта используются также обозначения

$$M_x u(x, y); \quad M_y u(x, y).$$

2. Предельная полезность продукта уменьшается, если объем его потребления растет, т.е.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} < 0; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y} < 0.$$

Это свойство называется *законом убывания предельной полезности*.

3. Предельная полезность продукта увеличивается, если растет количество другого продукта, т.е.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} > 0.$$

Последнее свойство справедливо не для всех товаров. Например, если товары могут полностью замещать друг друга, то это свойство не выполняется.

4.6. Линии безразличия

Линии уровня функции полезности потребителя, проходящие через потребительские наборы (x, y) с одним и тем же уровнем удовлетворения потребностей покупателя, называются *линиями безразличия*. Множество линий безразличия называется *картой линий безразличия* (рис. 4.7).

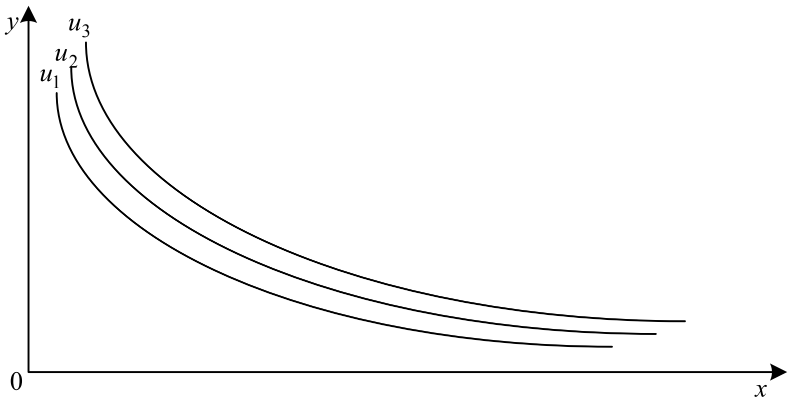


Рис. 4.7. **Линии безразличия**

На рис. 4.7 изображены линии безразличия, имеющие уровни функции полезности потребителя u_1, u_2 и u_3. Линии безразличия не касаются и не пересекаются. При увеличении уровня функции полезности линии безразличия смещаются вправо вверх. Для примера рис. 4.7 справедливо неравенство $u_1 < u_2 < u_3$.

Из приведенных выше свойств функции полезности следует, что линия безразличия в системе координат $x0y$ является убывающей и выпуклой вниз функцией. Действительно, дифференциал функции полезности $u = f(x,y)$ при движении вдоль линии уровня равен нулю, т.е.

$$du(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}dy = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \Bigg/ \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}. \qquad \textbf{(4.5)}$$

Так как числитель и знаменатель дроби величины положительные (свойство 1), то производная функции безразличия $y = y(x)$ является отрицательной, т.е. эта функция является убывающей.

Вторую производную функции $y = y(x)$ находят путем дифференцирования **(4.5)**, т.е.

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{\partial\left(-\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \Big/ \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right)}{\partial x} =$$

$$= \frac{-\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y \partial x}}{\left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right)^2}.$$

Так как первое слагаемое числителя положительно в силу свойств 1 и 2 функции полезности, а второе слагаемое числителя также положительно в силу свойств 1 и 3 функции полезности, то вторая производная функции безразличия $y = y(x)$ является величиной положительной. Отсюда следует, что линии безразличия выгнуты вниз.

Если приращения координат по осям x и y обозначить соответственно через Δx и Δy, то справедливо приближенное равенство

$$\frac{dy}{dx} \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Сопоставив это с **(4.5)**, найдем

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \Bigg/ \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \approx -\frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad \textbf{(4.6)}$$

Дробь $-\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ называется *нормой замены* первого продукта вторым, а производная $-\dfrac{dy}{dx}$ — *предельной нормой замены* первого продукта вторым. Если известна функция полезности $u = f(x, y)$, то норма замены рассчитывается по формуле **(4.6)** и показывает, на сколько должен потребитель увеличить (уменьшить) потребление второго продукта, если он уменьшил (увеличил) потребление первого продукта на 1 единицу без изменения уровня удовлетворения своих потребностей.

4.7. Оптимизация функции полезности

Задачей потребительского выбора называется определение такого потребительского набора (x^*, y^*), который максимизирует его функцию полезности при заданном бюджетном ограничении. Этот набор называют *оптимальным для потребителя*, или *локальным рыночным равновесием потребителя*.

Бюджетным ограничением называется денежная сумма (доход), предназначенная на покупку данного набора товаров. Бюджетное ограничение I и цены на первый товар p_1 и второй товар p_2 связаны соотношением $p_1 x + p_2 y \le I$. При помощи математических символов задачу математического выбора можно записать в виде:

$$u(x, y) \to \max$$

при условиях

$$p_1 x + p_2 y \le I, \tag{4.7}$$

$$x > 0, \quad y > 0.$$

Оптимальную точку потребительского набора (x^*, y^*) называют *точкой спроса*. Ясно, что координаты точки спроса зависят от цен и бюджетного ограничения I. Функция точки спроса от цен и бюджетного ограничения называется *функцией спроса*. Для потребительского набора из двух товаров функцией спроса является набор из двух функций:

$$x^* = x^*(p_1, p_2, I);$$

$$y^* = y^*(p_1, p_2, I).$$

Множество наборов товаров, доступных для потребителя, представляет собой треугольник, ограниченный осями координат и бюджетной прямой $p_1x + p_2y = I$ (рис. 4.8).

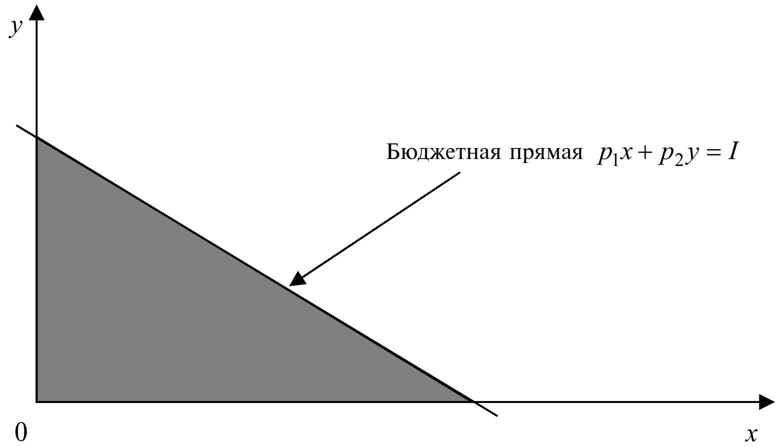


Рис. 4.8. **Бюджетное ограничение**

Основные свойства задачи потребительского выбора

1. Решение задачи $\left(x^*, y^*\right)$ не изменится при любом монотонном преобразовании функции полезности $u = f\left(x, y\right)$ и при неизменном бюджетном ограничении. Монотонным преобразованием функции полезности может быть ее умножение на некоторое положительное число, возведение ее в положительную степень, логарифмирование по основанию, большему единицы. При монотонном преобразовании функции полезности ее свойство 1 должно сохраняться, а свойства 2 и 3 могут теряться или приобретаться. То есть, если функция полезности в задаче потребительского выбора не обладает свойствами 2 и 3, она тем не менее может описывать реальное поведение потребителя.

2. Решение задачи потребительского выбора не изменится, если все цены и доход увеличатся (уменьшатся) в одно и то же число раз. Действительно, поскольку цены и доход не входят в функцию полезности, а умножение на положительное число правой и левой частей бюджетного ограничения $p_1x + p_2y \le I$ делает его эквивалентным исходному, то задача остается той же, что и первоначально.

При решении задачи математического выбора **(4.7)** бюджетное ограничение $p_1x + p_2y \le I$ будет выполняться в виде равенства $p_1x + p_2y = I$. Это связано с тем, что значение функции полезности увеличивается при увеличении x и y (свойство 1 функции полезности), т.е. максимум лежит на крайних правых и верхних точках (см. рис. 4.8). Таким образом, задачу математического программирования можно заменить задачей на условный экстремум, т.е.

$$u(x,y) \to \max$$

при условиях

$$g(x,y) = p_1x + p_2y - I = 0, \qquad \textbf{(4.8)}$$

$$x > 0, \quad y > 0,$$

где $u(x,y)$ — целевая функция; $g(x,y) = p_1x + p_2y - I$ — функция связи.

Функция Лагранжа для этой задачи имеет вид:

$$L(x, y, \lambda) = u(x, y) + \lambda(p_1x + p_2y - I),$$

где λ — множитель Лагранжа.

Составляем систему линейных уравнений, для чего приравниваем нулю первые частные производные функции Лагранжа:

$$\frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial x} = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \lambda p_1 = 0;$$

$$\frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial y} = \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \lambda p_2 = 0;$$

$$\frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial \lambda} = p_1x + p_2y - I = 0.$$

Умножим первое уравнение на p_2, второе — на p_1 и вычтем второе из первого:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} p_2 - \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} p_1 = 0.$$

Таким образом, система уравнений для укороченной подозрительной точки функции Лагранжа имеет вид:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \Bigg/ \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \frac{p_1}{p_2}; \qquad \textbf{(4.9)}$$

$$p_1x + p_2y = I. \qquad \textbf{(4.10)}$$

Сопоставив **(4.9)** с **(4.5)**, получим $-\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{p_1}{p_2}$, т.е. норма замены первого продукта вторым равна отношению цены первого продукта к цене второго.

Геометрический смысл условного экстремума функции $u = f(x, y)$ в точке (x^*, y^*) состоит в том, что градиенты целевой функции $\operatorname{grad} u(x^*,\ y^*)$ и функции связи $\operatorname{grad} g(x^*, y^*)$, выходящие из точки (x^*, y^*), обязательно расположены на одной прямой. Эти градиенты перпендикулярны линии уровня функций $f(x, y)$ и линии функции связи $g(x, y)$. Линия уровня функции $f(x, y)$ и линия функции связи $g(x, y)$, содержащие экстремальную точку (x^*, y^*), касаются в этой точке (рис. 4.9).

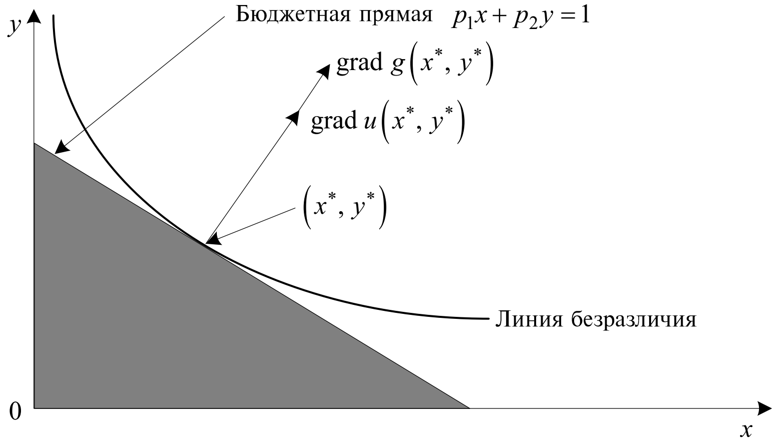


Рис. 4.9. **Направление градиента целевой функции и градиента функции связи**

Градиент $\operatorname{grad} u(x^*, y^*)$ функции $u(x, y)$ в точке (x^*, y^*) направлен вправо вверх, так как функция полезности $u = u(x, y)$ возрастает в этом направлении (свойство 1).

Градиент $\operatorname{grad} g\left(x^*, y^*\right)$ функции $g(x, y)$ в точке $\left(x^*, y^*\right)$ также направлен вправо вверх, так как

$$\operatorname{grad} g\left(x_0, y_0\right) = \frac{\partial g\left(x_0, y_0\right)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial g\left(x_0, y_0\right)}{\partial y}\vec{j} = p_1\vec{i} + p_2\vec{j},$$

а p_1 и p_2 положительны по условию задачи.

▷ **Пример 4.3.** Функция полезности для двух товаров имеет вид $u = xy$. Бюджетное ограничение I и цены на первый товар p_1 и второй товар p_2 связаны соотношением $p_1 x + p_2 y \le I$. Определить характеристики оптимального набора для потребителя и функции спроса на товары (оптимальное количество каждого из приобретаемых товаров).

Р е ш е н и е. Как показано выше, эту задачу математического программирования можно заменить задачей на условный экстремум:

$$xy \to \max$$

при условиях

$$g(x, y) = p_1 x + p_2 y - I = 0,$$

$$x > 0, \quad y > 0.$$

Так как $\frac{\partial u}{\partial x} = y$, а $\frac{\partial u}{\partial y} = x$, то система уравнений **(4.9)** и **(4.10)** для укороченной подозрительной точки функции Лагранжа имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{y^*}{x^*} = \frac{p_1}{p_2}, \\ p_1 x^* + p_2 y^* = I. \end{cases}$$

Из первого условия следует, что $x^* p_1 = y^* p_2$, т.е. количество денег, затраченных на оба товара, должно быть одинаковым. Подставив последнюю формулу во второе уравнение системы, получим $x^* p_1 = y^* p_2 = \frac{I}{2}$, т.е. расход потребителя на каждый товар составляет половину общего дохода потребителя. Функция спроса на первый и второй товар приобретает вид:

$$x^* = \frac{I}{2p_1}; \quad y^* = \frac{I}{2p_2}. \blacktriangleleft$$

4.8. Задача потребительского выбора для произвольного числа товаров

Для произвольного числа товаров n функция полезности может быть записана следующим образом:

$$u = u\left(x_1, x_2, ..., x_n\right).$$

Предельная полезность продукта под номером i определяется соотношением

$$M_{x_i} u\left(x_1, ..., x_n\right) = \frac{\partial u\left(x_1, ..., x_n\right)}{x_i}.$$

Задача потребительского выбора для этого случая имеет вид:

$$u\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \to \max$$

при условиях

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + ... + p_n \le I,$$

$$x_1 > 0, \quad x_2 > 0, \quad ..., \quad x_n > 0,$$

где $u = u\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ — функция полезности потребителя; p_1, p_2, ..., p_n — цена на первый, второй и т.д. товар; I — бюджетное ограничение; x_1, x_2, ..., x_n — количество приобретенных товаров первого, второго и т.д. типа.

Так же как и для случая двух переменных, эту задачу математического программирования можно заменить задачей на условный экстремум:

$$u\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \to \max$$

при условиях

$$I - \left(p_1 x_1 + p_2 x_2 + ... + p_n\right) = 0, \qquad \textbf{(4.11)}$$

$$x_1 > 0, \quad x_2 > 0, \quad ..., \quad x_n > 0.$$

Функция Лагранжа имеет вид:

$$L\left(x_1, ..., x_n, \lambda\right) = u\left(x_1, ..., x_n\right) + \lambda\left(I - \left(p_1 x_1 + p_2 x_2 + ... + p_n x_n\right)\right).$$

Составляем систему линейных уравнений, для чего приравниваем нулю первые частные производные функции Лагранжа:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L(x_1, ..., x_n, \lambda)}{\partial x_1} &= \frac{\partial u(x_1, ..., x_n)}{\partial x_1} - \lambda p_1 = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial L(x_1, ..., x_n, \lambda)}{\partial x_n} &= \frac{\partial u(x_1, ..., x_n)}{\partial x_n} - \lambda p_n = 0, \\ \frac{\partial L(x_1, ..., x_n, \lambda)}{\partial \lambda} &= I - (p_1 x_1 + p_2 x_2 + ... + p_n x_n) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(4.12)}$$

Умножим уравнение под номером i на p_i, а уравнение под номером j на p_j и вычтем одно из другого. В результате получим

$$\frac{\partial u(x_1, ..., x_n)}{\partial x_i} p_j - \frac{\partial u(x_1, ..., x_n)}{\partial x_j} p_i = 0.$$

Перепишем последнее выражение в виде

$$\frac{\partial u(x_1, ..., x_n)}{\partial x_i} \Big/ \frac{\partial u(x_1, ..., x_n)}{\partial x_j} = \frac{p_i}{p_j}.$$

Таким образом, в точке оптимума отношение предельных полезностей любых двух товаров равно отношению их рыночных цен. Если, например, товар под номером i в k раз дешевле товара под номером j, то при замене вместо одной единицы товара j надо использовать k единиц товара i. Такая замена может оказаться ненужной для покупателя. Поэтому считают, что всякое изменение ухудшает благосостояние потребителя.

Одно из уравнений из системы **(4.12)** для товара под номером i можно записать в виде

$$\frac{\partial u(x_1, ..., x_n)}{\partial x_i} \cdot \frac{1}{p_i} = \lambda^*.$$

Здесь λ^* — оптимальный множитель Лагранжа, который равен отношению предельной полезности продукта под номером i, т.е. $\dfrac{\partial u(x_1, ..., x_n)}{\partial x_i}$, деленной на цену этого продукта p_i. Поэтому это отношение называют *предельной полезностью на денежную единицу*, т.е. на рубль.

Решением задачи потребительского выбора **(4.11)** является оптимальный потребительский набор из n продуктов, определяемый точкой в n-мерном пространстве. Координаты оптимальной точки принято помечать звездочкой, а именно $x^* = \left(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*\right)$. Эта точка называется *точкой спроса*. Точка спроса, или оптимальное решение, зависящее от цен и бюджетного ограничения, называют *функцией спроса*. Функцию спроса можно представить в виде

$$x^* = x^*\left(P, I\right),$$

где x^* — вектор оптимальных решений; P — вектор цен; I — бюджетное ограничение.

Представим функцию спроса в виде набора n функций:

$$\begin{cases} x_1^* = x_1^*\left(p_1, ..., p_n, I\right), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n^* = x_n^*\left(p_1, ..., p_n, I\right). \end{cases}$$

Каждая из представленных в этой системе функций называется *функцией спроса конкретного товара*.

4.9. Уравнение Слуцкого

Уравнение Слуцкого имеет вид:

$$\frac{\partial x^*}{\partial p_i} = \left(\frac{\partial x^*}{\partial p_i}\right)_{\text{комп}} - \frac{\partial x^*}{\partial I} x_i^*.$$

В левой части этого уравнения стоит производная $\frac{\partial x^*}{\partial p_i}$ от точки спроса по цене товара под номером i. Эта величина показывает отклик точки спроса на изменение цены этого товара. Левая часть уравнения Слуцкого называется *общим эффектом от влияния цены на спрос*.

Второе слагаемое в правой части уравнения Слуцкого $\frac{\partial x^*}{\partial I} x_i^*$ является откликом точки спроса на изменение бюджетного ограничения I. Это слагаемое называется *влиянием дохода на спрос*.

Первое слагаемое в правой части уравнения Слуцкого $\left(\dfrac{\partial x^*}{\partial p_i}\right)_{\text{комп}}$ называется *влиянием компенсирующего изменения цены на спрос*. Это слагаемое показывает изменения цен на точку спроса при условии компенсации дохода так, чтобы полезность была неизменной. Геометрически это соответствует тому, что при изменении цены доход изменяют так, чтобы, оставаясь на той же линии полезности, получить новую точку спроса. Например, увеличивая цену товара под номером i, изменяют оптимальную точку спроса и уменьшают максимальную полезность. Затем увеличивают доход так, чтобы при новой точке спроса получить начальную полезность.

Можно показать, что выполняется неравенство

$$\left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_i}\right)_{\text{комп}} < 0. \qquad \textbf{(4.13)}$$

Из уравнения Слуцкого и соотношения **(4.13)** при $x_i^* \geq 0$ следуют условия:

$$\text{если } \frac{\partial x^*}{\partial I} > 0\text{, то всегда } \frac{\partial x^*}{\partial p_i} < 0; \qquad \textbf{(4.14)}$$

$$\text{если } \frac{\partial x^*}{\partial p_i} > 0\text{, то всегда } \frac{\partial x^*}{\partial I} < 0; \qquad \textbf{(4.15)}$$

$$\text{если } \frac{\partial x^*}{\partial p_i} < 0\text{, то, возможно, } \frac{\partial x^*}{\partial I} < 0. \qquad \textbf{(4.16)}$$

В зависимости от выполнения соотношений **(4.14)** и **(4.15)** товары подразделяются на ряд типов [4—6, 8]:

1) $\dfrac{\partial x^*}{\partial p_i} < 0$ — нормальный товар;

2) $\dfrac{\partial x^*}{\partial p_i} > 0$ — товар Гиффина;

3) $\dfrac{\partial x^*}{\partial I} > 0$ — ценный товар, т.е. при увеличении дохода спрос на него растет;

4) $\dfrac{\partial x^*}{\partial I} < 0$ — малоценный товар, т.е. при увеличении дохода спрос на него падает.

Из анализа типов товаров и соотношений **(4.14)** и **(4.15)** следует, что любой товар попадает в одну из следующих категорий:

1) $\dfrac{\partial x^*}{\partial p_i} < 0$, $\dfrac{\partial x^*}{\partial I} > 0$ — товар нормальный и ценный;

2) $\dfrac{\partial x^*}{\partial p_i} > 0$, $\dfrac{\partial x^*}{\partial I} < 0$ — товар Гиффина и малоценный;

3) $\dfrac{\partial x^*}{\partial p_i} < 0$, $\dfrac{\partial x^*}{\partial I} < 0$ — товар нормальный и малоценный.

Товар Гиффина обладает свойством, которое кажется не вполне реальным, а именно: снижение цены на товар ведет к снижению спроса на этот товар. Возникает вопрос о причинах поведения потребителя, для которого возможно такое поведение. На этот вопрос на разных примерах пытаются ответить многие исследователи [4—6, 8]. Возможна, например, следующая ситуация. Пусть некто, обладающий небольшим бюджетным ограничением, потребляет ряд продуктов, одним из которых является картофель. Если цена на него снизится, то часть средств у потребителя высвободится, и он сможет их использовать для приобретения более ценных продуктов питания. Так как потребитель будет потреблять большее количество ценных продуктов питания, то необходимость в потреблении прежнего количества картофеля отпадет. А это приведет к снижению спроса на картофель при снижении цены на него. Таким образом, товары Гиффина не являются нереальными, хотя встреча с такими товарами в действительности маловероятна.

У нормального и ценного товара качество выше, чем у товара нормального и малоценного. К ценному товару могут относиться, например, пищевые продукты высокого качества (сливочное масло без добавок), в отличие от пищевых продуктов широкого потребления, которые являются малоценными (маргарин). При увеличении дохода или при уменьшении цены сливочного масла без добавок покупают больше. При уменьшении дохода или при уменьшении цены маргарина покупают больше. К ценным товарам относятся также предметы роскоши, драгоценности. Справедливы и обратные утверждения.

Рассмотрим из всего набора товаров только два — с номерами i и j.

Если $\left(\dfrac{\partial x_i^*}{\partial p_j}\right)_{\text{комп}} > 0$, то товары i и j называются взаимозаменяемыми.

Если $\left(\dfrac{\partial x_i^*}{\partial p_j}\right)_{\text{комп}} < 0$, то товары i и j называются взаимодополняемыми.

Если $\left(\dfrac{\partial x_i^*}{\partial p_j}\right)_{\text{комп}} > 0$, то обязательно найдется такой товар i, для которого уменьшение спроса на j-й товар $\left(\dfrac{\partial x_j^*}{\partial p_j}\right)_{\text{комп}} < 0$ приводит к увеличению спроса на i-й товар. К взаимозаменяемым товарам относят, например, животное и растительное масло.

Товары i и j, для которых $\left(\dfrac{\partial x_i^*}{\partial p_j}\right)_{\text{комп}} < 0$, образуют взаимодополняемую пару. Например, компенсируемое увеличение цены на бензин приводит к падению спроса на бензин и на автомобили.

Функция спроса $x^*(p, I)$ обладает свойством валовой заменимости в том случае, если с увеличением цены на любой продукт j спрос на остальные продукты не убывает, т.е.

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial p_j} \geq 0, \quad i \neq j.$$

Функция спроса $x^*(p, I)$ обладает свойством сильной валовой заменимости, если

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial p_j} > 0, \quad i \neq j.$$

4.10. Кривые «доход-потребление»

Бюджетная прямая, определяемая соотношением

$$p_1 x + p_2 y = I \text{ или } y = -\frac{p_1}{p_2} x + \frac{I}{p_2}, \qquad \textbf{(4.17)}$$

и линия безразличия в оптимальной точке касаются друг друга. Если доход изменяется при постоянстве цен на товары, то бюджетная прямая сдвигается параллельно самой себе, так как тангенс угла наклона, равный $-\frac{p_1}{p_2}$, остается постоянным. При этом новая бюджетная линия будет касаться новой линии безразличия в новой оптимальной точке (см. рис. 4.9, рис. 4.10). Если соединить между собой все оптимальные точки, то получим кривую «доход-потребление». Для нормальных товаров эта кривая является возрастающей.

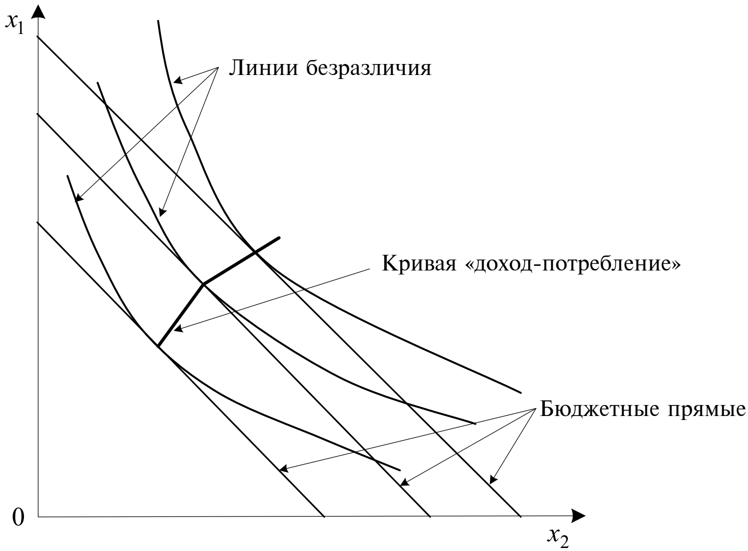


Рис. 4.10. **Кривая «доход-потребление»**

Для каждого уровня дохода I существует оптимальный набор из двух рассматриваемых товаров. *Кривой Эйнгеля* называется функция уровня дохода от оптимального значения какого-либо из товаров $I(x_1)$ или $I(x_2)$. Для нормального товара пример кривой Эйнгеля представлен на рис. 4.11.

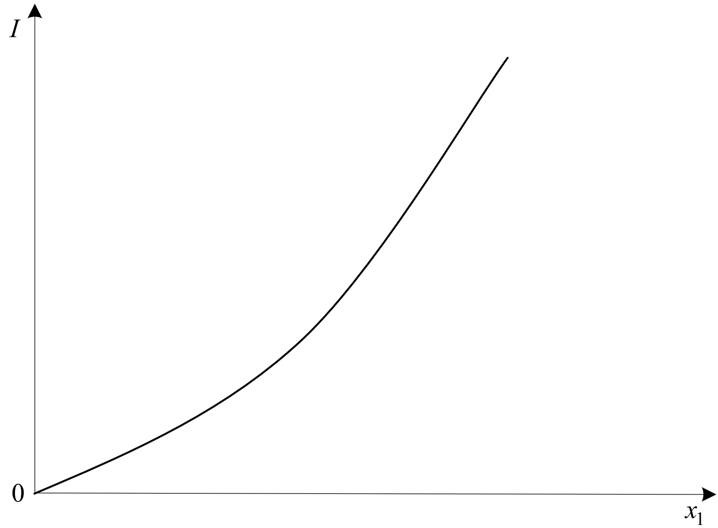


Рис. 4.11. **Кривая Эйнгеля**

На рис. 4.12 показан пример с линиями безразличия, для которых рост дохода приводит к сокращению потребления одного из товаров. На рис. 4.11 это товар x_1. Такой товар называется товаром низшей категории. К числу товаров низшей категории можно отнести овсяную кашу, дешевую колбасу или любой другой низкокачественный товар.

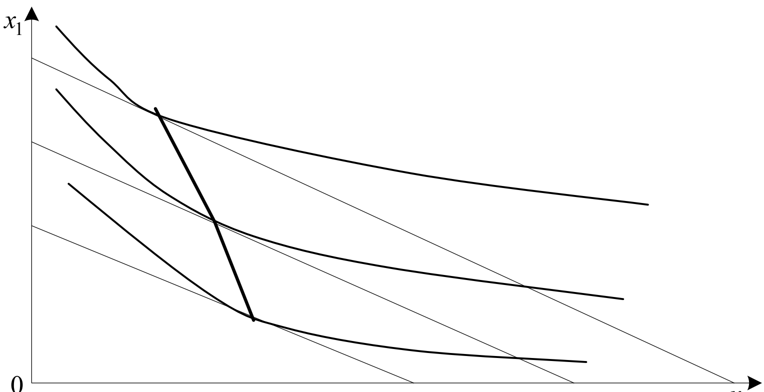


Рис. 4.12. **Кривая «доход-потребление» для товаров низшей категории**

Вполне может оказаться, что очень бедные люди по мере роста дохода будут потреблять больше дешевой колбасы. Но при достижении определенного уровня дохода потребление дешевой колбасы может начать сокращаться.

▷ **Пример 4.4.** Функция полезности для двух товаров определяется соотношением Кобба—Дугласа $u = a_0 x^a y^{1-a}$, где $0 < a < 1$. Бюджетное ограничение I и цены на первый товар p_1 и второй товар p_2 связаны соотношением $p_1 x + p_2 y \le I$.

Определить характеристики оптимального набора для потребителя, функции спроса на товары и построить кривую «доход-потребление» и кривую Эйнгеля.

Р е ш е н и е. Заменим эту задачу математического программирования задачей на условный экстремум:

$$a_0 x^a y^{1-a} \to \max$$

при условиях

$$g(x, y) = p_1 x + p_2 y - I = 0,$$

$$x > 0, \quad y > 0.$$

Так как $\dfrac{\partial u}{\partial x} = a_0 a x^{a-1} y^{1-a}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = a_0 (1-a) x^a y^{-a}$, то система уравнений **(4.9)** и **(4.10)** для укороченной подозрительной точки функции Лагранжа имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{a y_0}{(1-a) x_0} = \dfrac{p_1}{p_2}, \\ p_1 x_0 + p_2 y_0 = I. \end{cases}$$

Из первого условия следует, что $\dfrac{x_0 p_1}{a} = \dfrac{y_0 p_2}{1-a}$, т.е. количество денег, затраченных на оба товара, обратно пропорционально степеням при соответствующих неизвестных функции Кобба—Дугласа. Подставив последнюю формулу во второе уравнение системы, получим формулы для кривых Эйнгеля:

$$\left.\begin{aligned} I &= \frac{p_1}{a} x_0, \\ I &= \frac{p_2}{1-a} y_0. \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(4.18)}$$

Функции спроса на первый и второй товары находим из соотношений **(4.18)**:

$$x_0 = \frac{I \cdot a}{p_1}; \quad y_0 = \frac{I \cdot (1-a)}{p_2}. \qquad \textbf{(4.19)}$$

Кривую «доход-потребление» получим, разделив второе уравнение **(4.19)** на первое и проведя необходимые преобразования:

$$y_0 = \frac{(1-a) \cdot p_1}{a \cdot p_2} x_0. \qquad \textbf{(4.20)}$$

Как следует из соотношений **(4.18)** и **(4.20)**, кривая Эйнгеля и кривая «доход-потребление» являются прямыми линиями. ◀

4.11. Кривые «цена-потребление»

Перейдем к рассмотрению изменения цен. Предположим, что снижается цена товара x, а цена товара y и доход остаются постоянными. В этом случае бюджетная прямая переместится вправо, поворачиваясь вокруг точки $\left(0, \frac{I}{p_2}\right)$ (рис. 4.13). При этом новая бюджетная линия будет касаться новой линии безразличия в новой оптимальной точке.

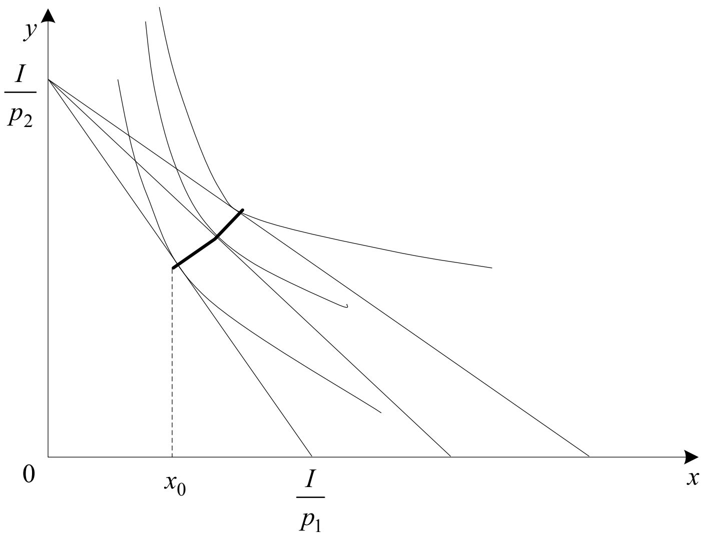


Рис. 4.13. **Кривая «цена-потребление»**

Если соединить между собой все оптимальные точки, то получим кривую «цена-потребление». Из рис. 4.13 следует достаточно очевидный факт, состоящий в том, что при уменьшении цены на товар x спрос на него увеличивается. Тем не менее не все товары обладают этим свойством.

На рис. 4.14 представлен случай, для которого снижение цены на товар x ведет к снижению спроса на этот товар. Такой товар называют *товаром Гиффина* в честь экономиста XIX в., первым заметившего подобную возможность.

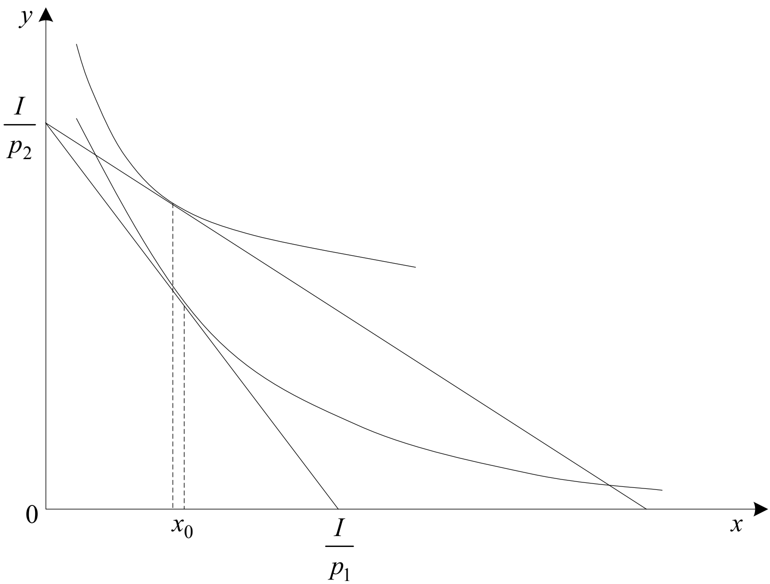


Рис. 4.14. **Кривая «цена-потребление» для товара Гиффина**

▷ **Пример 4.5.** Условия примера 4.4.

Построить кривую «цена-потребление».

Р е ш е н и е. Система уравнений для укороченной подозрительной точки функции Лагранжа имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{ay_0}{(1-a)x_0} = \dfrac{p_1}{p_2}, \\ p_1x_0 + p_2y_0 = I. \end{cases}$$

Решив второе уравнение системы относительно p_1, найдем $p_1 = \dfrac{I}{x_0} - p_2\dfrac{y_0}{x_0}$. Подставим этот результат в первое уравнение системы и получим $\frac{ay_0}{(1-a)x_0} = \frac{I}{p_2 x_0} - \frac{y_0}{x_0}$ или $y_0\left(\frac{a}{1-a}+1\right) = \frac{I}{p_2}$. Отсюда находим функцию для кривой «цена-потребление»

$$y_0 = \frac{(1-a)I}{p_2}.$$

Как следует из последней формулы, кривая «цена-потребление» является прямой линией, параллельной оси $0x$. ◀

4.12. Макроэкономические инвестиции

В переводе с латинского слово «инвестиция» означает «вложение». В современном понимании инвестиция означает вложение капитала с целью его увеличения в будущем. Такое увеличение капитала должно компенсировать инвестору отказ от потребления имеющихся средств в настоящее время и риск, а также перекрыть инфляционные потери.

В общем случае *инвестиции* — это наука о состоянии и управлении реальными проектами и инструментами фондового рынка, изучающая простейшие и вместе с тем наиболее общие свойства движения материальных средств, вкладываемых в объекты различных видов деятельности человека, в результате которых создается доход [7].

В макроэкономике под инвестициями понимаются реальные инвестиции, т.е. вложение средств в реальные активы, как материальные, так и нематериальные. Вложение средств в нематериальные активы иногда связывают с научно-техническим прогрессом и называют *инновационными инвестициями*. Реальные инвестиции формируют основной и оборотный капитал предприятия.

Материальные активы представляют собой средства, воплощенные в новых производственных зданиях и сооружениях, машинах, комплектующих изделиях, готовой продукции.

Нематериальные активы — это стоимость лицензий, патентов, товарных знаков, затрат на рекламу, на подготовку кадров.

Управление инвестициями в объеме страны осуществляется центральными государственными органами. В России такими органами являют Правительство, Дума и Центральный банк. Для управления инвестициями Правительством РФ создается модель развития экономики. В этой модели внутренний валовой продукт (внутренний национальный продукт, национальный доход) делится в определенной (оптимальной) пропорции на потребление и инвестиции. В России необходимо учесть также часть капитала, вывозимого за границу. Эта пропорция должна выбираться так, чтобы экономика развивалась оптимальным образом. Управление инвестициями Правительством, Думой и Центральным банком осуществляется в этом случае путем инвестиционной и налоговой политики, влиянием на норму ссудного процента.

Развитие науки и технологии приводит к изменению исходных данных модели оптимального управления инвестициями. Поэтому в процессе управления необходимо отслеживать наиболее существенные достижения в технологиях и вносить в модель соответствующие изменения.

Развивающаяся оптимальным образом экономика приводит к стабильному и достаточно быстрому экономическому росту. Примером модели оптимального развития является модель Солоу, которую подробно рассмотрим в гл. 5. Состояние экономики в модели Солоу задается рядом переменных, являющихся функциями времени, измеряемого в годах.

Совершенно очевидно, что для реализации оптимальной программы инвестирования в стране должны быть созданы условия, близкие к совершенной конкуренции, предполагающей большое количество фирм и покупателей, свободный вход на рынок и выход с рынка, совершенную информированность продавцов и покупателей о состоянии рынка. На таком рынке отдельные продавцы не контролируют цены.

Рассматривают валовые и чистые макроэкономические инвестиции.

Валовые инвестиции включают в себя затраты на замещение старого оборудования и на расширение производства и инновации. *Чистые инвестиции* — валовые инвестиции минус амортизация основного капитала.

Влияние инвестиций на величину национального дохода определяют по *мультипликатору*. Мультипликатор показывает, во сколько раз в году возрастет выпуск при заданном приращении инвестиций. Мультипликатор M определяется по формуле

$$M = \frac{\Delta Y}{\Delta I},$$

где ΔY — прирост выпуска; ΔI — прирост инвестиций.

В результате прироста инвестиций выпуск может в несколько раз превысить этот прирост. Различия в объемах изменения валового внутреннего продукта и изменения инвестиций связаны с тем, что однократное изменение инвестиций порождает многократное изменение выпуска. Например, расходы на инвестиции в продовольственный сектор увеличились на величину, равную ΔI единиц. Доходы работников продовольственного сектора также увеличились на $\Delta I.$. Эти работники с предельной склонностью к потреблению b израсходовали на покупку электронной техники $\Delta I \cdot b$ единиц. Работники электронного сектора получили доход $\Delta I \cdot b$ единиц и израсходовали его на покупку автомобилей с предельной склонностью к потреблению b, т.е. потратили $\Delta I \cdot b \cdot b = \Delta I \cdot b^2$ единиц. Работники автомобильного сектора, в свою очередь, израсходовали $\Delta i \cdot b^3$ единиц и т.д. Таким образом, общий доход ΔY за счет увеличения инвестиций в продовольственном секторе на величину ΔI можно найти как сумму всех доходов:

$$\Delta Y = \Delta I + \Delta I \cdot b + \Delta I \cdot b^2 + \ldots = \Delta I \left(1 + b + b^2 + \ldots\right) = \Delta I \cdot M.$$

В скобках имеем сумму бесконечной прогрессии со знаменателем b, являющимся предельной склонностью к потреблению. Поэтому формулу для определения мультипликатора можно представить в виде

$$M = 1 + b + b^2 + \ldots = \frac{1}{1-b}.$$

Факторами, препятствующими росту мультипликатора, являются причины, сокращающие предельную склонность к потреблению. К таким причинам относятся высокая склонность к сбережению, налоги, преобладание импорта над экспортом, рост цен.

Другим показателем, связывающим прирост выпуска и прирост инвестиций, является *акселератор*. В отличие от мультипликатора, акселератор показывает, как прирост дохода в прошедшие периоды (в прошлые годы) влияет на прирост инвестиций в текущем году. Акселератор V может быть вычислен по формуле

$$V = \frac{\Delta I_t}{\Delta Y_{t-1} - \Delta Y_{t-2}},$$

где ΔI_t — прирост инвестиций в текущем году; ΔY_{t-1} — прирост выпуска в прошлом году; ΔY_{t-2} — прирост выпуска в позапрошлом году.

Как мультипликатор, так и акселератор широко используются для регулирования экономики.

4.13. Характеристики инвестиций

Для оценок инвестиций используются общеизвестные понятия, называемые эффектами и эффективностями. Эффекты и эффективности позволяют описать качество инвестиций, вкладываемых в тот или иной инвестиционный проект. Такое представление качества инвестиционных проектов позволяет сравнительно легко управлять их реализацией путем сравнения планового и реального состояния и последующего принятия решений.

Схема для определения эффектов и эффективностей инвестиционного проекта представлена на рис. 4.15.

Рис. 4.15. **Схема инвестиционного проекта**

Входы формируются внешней и внутренней средой. К числу входов относятся тип бизнеса, количество сотрудников и их квалификация, инвестиции, поставщики, банки, законодательная база и т.д.

Выходы являются *эффектами*. К выходам могут относиться, например, выпускаемый за заданный промежуток времени объем продукции, объем основных и оборотных средств, собственный капитал предприятия, чистая прибыль, стоимость нематериальных активов и пр. Выходы имеют простую размерность (например, рубль, тонна, погонный метр и т.д.).

Эффективность — это отношение выходов к входам. Эффективностью являются, например, производительность труда, доходность, коэффициенты ликвидности активов предприятия и др. Эффективность имеет сложную размерность или является величиной безразмерной. К эффективностям, например, относятся доходность ссудной операции, т.е. отношение процентов к величине долга, производительность труда, т.е. отношение выхода продукции к затратам на производство, и т.д.

На качество инвестиционного проекта влияют как внутренние, так и внешние факторы.

Внешними называются факторы, которые в краткосрочном плане не могут быть объектами контроля или влияния со стороны руководства проекта. Это примерно 15—20% всех факторов.

К ним относятся:

- цикл деловой активности и структурные изменения;
- внешние ресурсы;
- правительство и инфраструктура;
- неправительственные организации и общественные движения (центры по вопросам эффективности, аналитические и консалтинговые центры).

Внутренние факторы — факторы, которые находятся под контролем руководства предприятия и на которые оно должно оказывать влияние. Это примерно 80—85% всех факторов.

К ним относятся факторы, связанные с:

- исходными ресурсами;
- процессом производства;
- выпуском продукции.

Инвестиционный процесс предусматривает, во-первых, создание объекта и, во-вторых, получение дохода. Эти два процесса протекают, как правило, последовательно. Иногда отдача от инвестиций начинается до момента завершения процесса вложений. Это означает, что в некоторый период инвестиции и отдача от них протекают параллельно.

Основой анализа инвестиционных показателей являются *потоки платежей*. Элементы потоков платежей формируются из инвестиционных расходов и чистого дохода.

Чистый доход — выручка, полученная в каждом временнóм отрезке, за вычетом всех платежей, связанных с его созданием и получением. К платежам, связанным с созданием и получением чистого дохода, относятся затраты на производство продукции или услуг, издержки предприятия, налоги. К полученной после этого величине дохода прибавляют также амортизационные отчисления, которые являются частью чистого дохода.

В основу анализа потоков платежей положен метод дисконтирования элементов этих потоков.

Капитал, используемый для финансирования инвестиционных проектов, покупают и продают на рынке капитала. Мерой доходности и стоимости капитала является процентная ставка: для инвестора — это доходность, для должника — цена капитала.

▷ **Пример 4.6.** Инвестируются 10 000 руб. Через два года инвестор получит 12 100 руб.

Определить доходность инвестора и цену капитала при условии, что долг выплачивается из чистой прибыли.

Решение: $a = \left(\frac{S}{P}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 = \left(\frac{12\,100}{10\,000}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 = 0{,}1$, или 10% годовых.

Здесь введены следующие обозначения: a — сложная процентная ставка; S — наращенная сумма; P — первоначальная сумма долга; n — срок инвестиции.

Таким образом, доходность инвестора и цена капитала для должника равны 10% годовых. ◀

Кредитор и должник принимают решение о проведении финансовой операции только в том случае, если каждый из них сочтет ее выгодной для себя. Принимая решение, каждый из участников операции сравнивает ее с неким эталоном. Для рассматриваемой операции эталоном является рыночная ставка капитала. Ориентиром этой ставки может являться, например, ставка рефинансирования, устанавливаемая Банком России.

Ставку дисконтирования инвестиционного проекта при финансировании проекта за счет собственного капитала можно выбрать равной рыночной доходности капитала. Делается это на основании следующих соображений. Пусть инвестор намеревается инвестировать K руб. Через год эта инвестиция принесет инвестору доход E руб. На рынке инвестиция подобного рода имеет среднюю доходность $q\,\%$ годовых. Современная стоимость дохода может быть определена по формуле

$$P = \frac{E}{1+q}.$$

Если современная стоимость дохода $P > K$, то инвестор может принять решение об инвестициях.

Если же рассмотреть другой крайний случай, когда инвестиционный проект финансируется только за счет заемного капитала, то ставка дисконтирования, равная рыночной доходности капитала, может оказаться недостаточной. Действительно, реализовав проект и получив доход, участники проекта окажутся без прибыли, так как весь доход будет выплачен в виде процентов за заемный капитал. Поэтому разработаны другие методы для выбора ставки дисконтирования. Например, эта ставка может быть определена по формуле

$$q = (1+\vartheta)\cdot\left(1+\bar{H}\right) - 1 = \vartheta + \bar{H} + \vartheta\cdot\bar{H},$$

где q — ставка дисконтирования с учетом инфляции; ϑ — очищенная от инфляции ставка дисконтирования; $\bar{H}$ — средний темп инфляции за исследуемый период.

При выполнении условий $\vartheta << 1$ и $\bar{H} << 1$ имеем

$$q \approx \vartheta + \bar{H}.$$

Очищенная от инфляции ставка дисконтирования ϑ состоит из двух составляющих и вычисляется по формуле

$$\vartheta = \vartheta_{\text{б}} + \vartheta_{\text{р}},$$

где $\vartheta_{\text{б}}$ — безрисковая часть ставки дисконтирования без учета инфляции; $\vartheta_{\text{р}}$ — рисковая часть ставки дисконтирования (премия за риск) без учета инфляции.

Безрисковая и рисковая части ставки дисконтирования определяются из следующих соображений.

Безрисковую часть этой ставки в России находят исходя из ставки межбанковского кредита без учета инфляции. За рубежом эту ставку определяют как доходность по безрисковым активам также без учета инфляции. В США в качестве безрискового актива принимается ценная государственная краткосрочная бумага — казначейский вексель. По статистике США, очищенная от инфляции средняя за 63 года доходность казначейского векселя составляет 0,5% годовых.

Понятие «*безрисковый срочный актив*» является идеальным. В экономике таких активов не существует. Но поскольку это понятие плодотворно используется в экономическом анализе, то его введение является вполне обоснованным. Обычно в качестве безрисковых активов используются ценные бумаги, по которым никогда не было отказов в выплатах. Тем не менее в любом случае риск потерь доходности существует из-за инфляции. Однако точность прогнозирования доходности из-за небольшого срока актива, с одной стороны, и из-за малых годовых темпов инфляции, с другой, может быть довольно высокой. Поэтому, пренебрегая незначительными потерями из-за неточности прогнозов, такие активы считают безрисковыми.

За счет риска ставка дисконтирования увеличивается на величину, называемую *премией за риск*. Выбор премии за риск является весьма неопределенной задачей и зависит от степени риска. Например, стоимость кредита, используемого в качестве капитала инвестиционного проекта, будет зависеть от риска этого проекта. Поэтому рисковая часть ставки дисконтирования будет определяться премией за риск этого кредита. Обычно премия за риск определяется экспериментально.

В табл. 4.2 приведены возможные ставки сравнения для различных типов инвестиций при существующей в США инфляции [2].

Таблица 4.2

Вид инвестиций	*Ставка сравнения, %*
Снижение затрат, известная технология	10
Расширение осуществляемого бизнеса	15 (затраты компании на капитал)
Новая продукция	20
Венчурные предприятия	30

Из табл. 4.2 видно, что при увеличении риска ставка дисконтирования существенно возрастает.

При учете инфляции темп прироста инфляции может быть взят из прогнозов, представленных в федеральном бюджете, и из других официальных документов. Многие разработчики технико-экономических обоснований проектов проводят прогноз инфляции самостоятельно.

Рассмотрим некоторые показатели инвестиционного проекта с одноразовой инвестицией. Это наиболее простой случай, но и наиболее показательный. Схема потока платежей этого случая приведена на рис. 4.16.

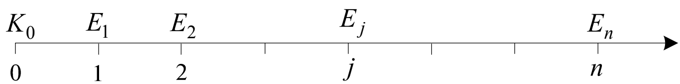


Рис. 4.16. **Схема потока инвестиционного проекта при одноразовой инвестиции**

Рассматриваемый финансовый поток проекта состоит из одной инвестиции I_0 и следующих друг за другом инвестиционных доходов E_j, где j — номер года. Выплата инвестиции производится в начале проекта, т.е. в момент времени, равный нулю. Выплаты дохода производятся в конце каждого года. Такие платежи называются *платежами постнумерандо.* В данном случае количество доходов, приносимых инвестиционным проектом, равно сроку этого проекта n.

Оценка качества инвестиционных проектов заключается в расчете системы показателей. При этом используют дисконтирование платежей потока. Ясно, что результат расчета, т.е. величина показателей, существенным образом будет зависеть от величины ставок, используемых при дисконтировании.

Довольно часто в качестве основного показателя проекта различные предприятия используют чистый приведенный доход (Net Present Value — *NPV*).

Чистый приведенный, или дисконтированный, доход — это разность доходов, дисконтированных на начало инвестиционного процесса, и инвестиции. Формула для расчета чистого приведенного дохода имеет вид:

$$NPV = \sum_{j=1}^{n} \frac{E_j}{(1+q)^j} - K_0 , \qquad \textbf{(4.21)}$$

где n — продолжительность инвестиционного проекта; E_j — инвестиционные доходы в периоде $j = 1, 2, ..., n$; q — ставка сравнения.

Считают, что проект может быть принят для работы, если чистый приведенный доход больше или равен нулю.

▷ **Пример 4.7.** Имеются два варианта инвестиционного проекта, в которых платежи распределены по годам так, как представлено в табл. 4.3.

Таблица 4.3

Год		1	2	3
	Инвестиции	*Доходы*		
Проект 1	5	4	4	5
Проект 2	6	4	5	6

Сравнить проекты по чистому приведенному доходу при ставке дисконтирования $q = 10\%$.

Р е ш е н и е. $NPV_1 = \frac{4}{1,1} + \frac{4}{1,1^2} + \frac{5}{1,1^3} - 5 = 5,7$,

$$NPV_2 = \frac{4}{1,1} + \frac{5}{1,1^2} + \frac{6}{1,1^3} - 6 = 6,3 .$$

Так как $NPV_2 > NPV_1$, то второй проект предпочтительнее первого. ◀

Ставка дисконтирования q является в определенном смысле величиной условной. Поэтому чистый приведенный доход определяется для некоторого диапазона этих ставок. Возможная зависимость чистого приведенного дохода от ставки дисконтирования приведена на рис. 4.17.

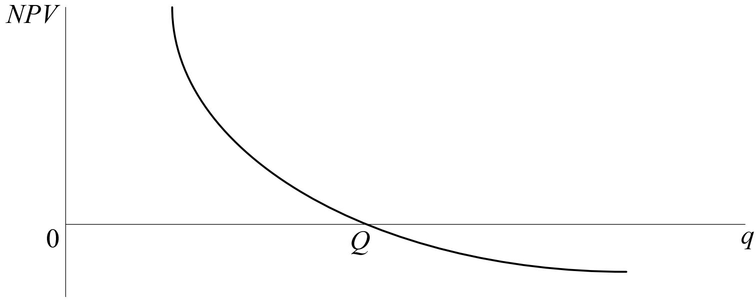


Рис. 4.17. **Зависимость чистого приведенного дохода от ставки дисконтирования**

Из рис. 4.17 следует, что чистый приведенный доход может быть как положительной, так и отрицательной величиной. В рассматриваемом случае график чистого приведенного дохода от ставки дисконтирования обязательно пересекается с осью абсцисс. Точку пересечения обозначим буквой Q.

Другим важным показателем является внутренняя норма доходности (Internal Rate of Return — *IRR*).

Внутренняя норма доходности — это расчетная процентная ставка, при которой чистая приведенная стоимость равна нулю, т.е. приведенные доходы равны инвестиции. Внутреннюю норму доходности находят путем решения приведенного ниже уравнения относительно Q:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{E_j}{(1+Q)^j} - K_0 = 0. \qquad \textbf{(4.22)}$$

Эта величина для случая одноразовой инвестиции по аналогии с доходностью к погашению кредита может быть названа *доходностью инвестиций*.

Это уравнение с одним неизвестным Q. Остальные показатели этого уравнения известны. На рис. 4.17 представлен геометрический метод решения такого уравнения. Его решением является координата Q точки пересечения кривой с осью абсцисс.

Если внутренняя норма доходности больше ставки дисконтирования, то чистая приведенная стоимость является положительной. При их равенстве проект имеет нулевую чистую приведенную стоимость.

▷ **Пример 4.8.** Имеются два варианта инвестиционного проекта, в которых платежи распределены по годам так, как представлено в табл. 4.3.

Сравнить проекты по внутренней норме доходности.

Р е ш е н и е. Для первого проекта исходное уравнение имеет вид:

$$\frac{4}{1+Q}+\frac{4}{(1+Q)^2}+\frac{5}{(1+Q)^3}-5=0.$$

Решают такие уравнения цифровыми методами, например, на компьютере в системе Excel. Его решение равно $Q_1 = 65{,}124\%$. Аналогично находим решение для второго проекта $Q_2 = 58{,}8\%$. Первый проект оказался лучше. ◀

Анализ противоречивых результатов двух приведенных примеров заставляет задуматься о выборе критерия для принятия решения. Можно рекомендовать выбрать первый проект, несмотря на то, что чистая приведенная стоимость этого проекта меньше, чем у второго. При отсутствии других альтернатив, кроме двух рассмотренных примеров, инвестор мог бы выбрать второй проект, несмотря на то, что инвестировать в него надо больше на 1 денежную единицу. Однако в развитой рыночной экономике существует достаточно много проектов, которые инвестор может использовать для инвестирования. Поэтому, выбрав первый проект, инвестор сможет инвестировать одну оставшуюся денежную единицу в третий, четвертый и т.д. проекты.

Выбор же первого проекта обоснован тем, что $Q_1 > Q_2$, т.е. внутренняя норма доходности первого проекта больше, чем внутренняя норма доходности второго проекта.

Используются и другие показатели для анализа инвестиционных проектов. К их числу относятся индекс прибыльности (рентабельность), срок окупаемости, доходность инвестиционного проекта для общего случая потоков платежей.

4.14. Спрос на инвестиции

Спрос на инвестиции определяется процентной ставкой, по которой должники рассчитываются за полученный капитал. Спрос на капитал формируют предприниматели. *Спрос на капитал* — это спрос на инвестиции, которые используются для создания производственных фондов. Чем дешевле инвестиции, тем больше заемного капитала предприниматель готов использовать в своих проектах. Поэтому функция спроса на инвестиции I от процентной ставки r является убывающей. В теории обычно используют обратную функцию, т.е. $r = r(I)$. Пример графика функции доходности инвестиций r от их объема I показан на рис. 4.18.

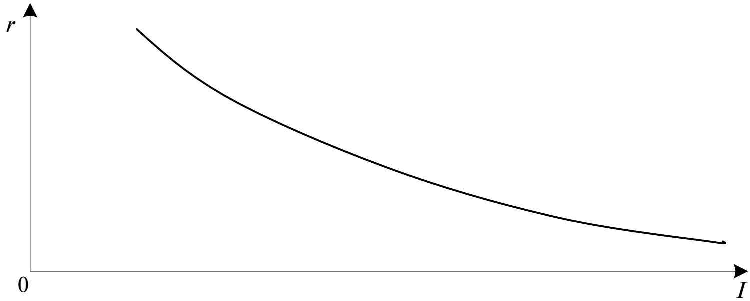


Рис. 4.18. **Зависимость доходности капитала от объема инвестиций**

Уменьшение доходности инвестиций при увеличении их объема объясняет, например, факт выравнивания доходности инвестиций в различных отраслях. Допустим, что в пищевой отрасли доходность больше, чем в других отраслях. Бизнесмены начнут вкладывать капитал в эту отрасль. Увеличение объемов инвестиций в пищевую отрасль приведет к снижению доходности. Снижение будет продолжаться до тех пор, пока доходность этой отрасли не выравняется с доходностью в остальных отраслях.

В качестве модели, определяющей спрос на инвестиции в зависимости от процентной ставки, иногда используется прямая линия. Такую модель можно записать в виде:

$$I = I_0 - d \cdot r, \qquad \textbf{(4.23)}$$

где I_0 — предельная величина инвестиций при $r \to 0$; r — коэффициент пропорциональности.

Упражнения

Задача 4.1. Для функции полезности $u(x_1, x_2) = x_1^{a_1} x_2^{a_2}$ найти точку спроса, определить ценность товаров, составить уравнение Слуцкого и провести его анализ.

Задача 4.2. Функция полезности потребителя для n товаров имеет вид $u(x)=\sum_{i=1}^{n}a_i x_i^b$, где $0<b<1$, $a_i>0$, i — номер товара. Бюджетное ограничение I и цены на товары p_i связаны соотношением $\sum_{i=1}^{n}p_i x_i \le I$.

Определить функцию спроса на товары и показать, что эта функция обладает свойством сильной валовой заменимости.

Задача 4.3. Имеются два варианта инвестиционного проекта, в которых платежи постнумерандо распределены по годам следующим образом:

проект 1	−5	−20	3	10	10	20	20;
проект 2	−20	−5	5	10	10	20	20.

Определить чистый приведенный доход, индекс прибыльности, срок окупаемости при ставках дисконтирования 10 и 20% и внутреннюю норму доходности, а также доходность инвестиций при стоимости капитала 10% годовых.

Библиографический список

1. *Агапова Т.А.*, *Серегина С.Ф.* Макроэкономика. М.: ДиС, 1997.
2. *Брейли Р.*, *Майерс С.* Принципы корпоративных финансов. М.: Олимп-бизнес, 2004.
3. *Вечканов Г.С.*, *Вечканова Г.Р.* Макроэкономика. М.: Питер, 2006.
4. *Данилов Н.Н.* Курс математической экономики. М.: Высшая школа, 2006.
5. *Замков О.О.* и др. Математические методы в экономике. М.: ДиС, 2004.
6. *Колемаев В.А.* Математическая экономика. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005.
7. *Кузнецов Б.Т.* Инвестиции. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2007.
8. *Малыхин В.И.* Математическое моделирование экономики. М.: УРАО, 1998.
9. *Тарасевич Л.С.*, *Гребенников П.И.*, *Леусский А.И.* Макроэкономика. М.: Высшее образование, 2007.

Глава 5

Теории экономического роста

5.1. Факторы экономического роста

Под *экономическим ростом* обычно понимают увеличение реального дохода в экономике, к которому относят внутренний валовой продукт, внутренний национальный продукт, или национальный доход, а также рост реального выпуска в расчете на душу населения. Рост внутреннего валового продукта или любого другого показателя на душу населения характеризует повышение жизненного уровня людей.

Основными показателями, используемыми для описания экономического роста, являются темп роста и темп прироста.

Темп роста показывает, во сколько раз в исследуемом году увеличился изучаемый показатель по сравнению с базисным годом.

Темп прироста показывает, на сколько увеличился темп роста в исследуемом году по сравнению с базисным годом. Темп прироста находят путем вычитания единицы из темпа роста.

В документации темп роста и темп прироста указываются в процентах.

Рассматривают два типа экономического роста: экстенсивный и интенсивный.

Экономический рост называется *экстенсивным*, если он осуществляется за счет привлечения дополнительных ресурсов и не изменяет среднюю производительность труда. Экстенсивный тип экономического роста предполагает увеличение роста численности работников инвестиций, сырья, а также стабильную структуру производства.

Интенсивный рост связан с применением более совершенных факторов производства и технологии, т.е. осуществляется за счет роста отдачи от ресурсов. Этот тип экономического роста предполагает увеличение эффективности использования ресурсов, а не увеличение их численности. Это происходит за счет совершенствования факторов производства, внедрения достижений науки и техники, новых технологий, повышения производительности труда, повышения качества продукции и т.д.

Факторы экономического роста обычно группируются с типами экономического роста. К экстенсивным факторам относят рост затрат капитала и труда. К интенсивным факторам относят технологический прогресс, рост образовательного и профессионального уровня работников, совершенствование управления производством, улучшение законодательства и т.д.

Математическая модель роста является упрощенным представлением реальной экономики в форме уравнений, таблиц и графиков. Несмотря на то что экономическая модель пренебрегает отдельными факторами действительности, она дает возможность проанализировать различные стороны и закономерности экономического роста. Поэтому многие государства в качестве своей экономической политики выбирают ту или иную модель. Ниже рассмотрены широко известные модели Харрода—Домара и Солоу [1—5].

5.2. Модель Харрода—Домара

Модель Харрода—Домара описывает динамику выхода (дохода) $Y(t)$, который является суммой потребления $C(t)$ и инвестиций $I(t)$. Эти показатели удовлетворяют следующему соотношению:

$$Y(t) = C(t) + I(t). \qquad \textbf{(5.1)}$$

Отношение инвестиций $I(t)$ к выходу $Y(t)$ для момента времени t называется нормой накопления в момент времени t. Формула для нормы накопления $\alpha(t)$ имеет вид:

$$\alpha(t) = \frac{I(t)}{Y(t)} = 1 - \frac{C(t)}{Y(t)}.$$

Экономика считается закрытой, поэтому чистый экспорт равен нулю, а государственные расходы в модели не выделяются. Основной предпосылкой модели роста является формула взаимосвязи между инвестициями и скоростью роста дохода. Предполагается, что инвестиции пропорциональны скорости роста дохода, т.е.

$$I(t) = B\frac{dY(t)}{dt}, \quad \textbf{(5.2)}$$

где B — предельный коэффициент капиталоемкости, или фондоемкости, прироста дохода, равный отношению прироста капитала (основных средств) к приросту выпуска.

Обратная величина $b = \frac{1}{B}$ называется предельным коэффициентом капиталоотдачи, или фондоотдачи.

В модель включаются следующие предпосылки:

1) модель не учитывает выбытие основного капитала;

2) модель не учитывает технического прогресса;

3) инвестиционный лаг равен нулю, т.е. инвестиции мгновенно переходят в прирост капитала;

4) производственная функция является линейной.

Изменяющиеся во времени выход $Y(t)$ называется *абсолютной траекторией*. Дифференциальное уравнение для определения абсолютной траектории модели Харрода—Домара получим, подставив **(5.2)** в **(5.1)**:

$$Y(t) = C(t) + B\frac{dY(t)}{dt}. \quad \textbf{(5.3)}$$

Соотношение **(5.3)** является линейным дифференциальным уравнением первого порядка. Обычно такие уравнения записывают в виде:

$$\frac{dY(t)}{dt} - \frac{1}{B}\cdot Y(t) = -\frac{1}{B}\cdot C(t). \quad \textbf{(5.4)}$$

Известно, что решение линейного дифференциального уравнения такого вида можно представить в виде квадратур. Это решение можно отыскать во многих математических справочниках и учебниках по дифференциальным уравнениям. Для нашего случая решение принимает вид:

$$Y(t) = e^{\int\frac{1}{B}dt}\left(-\int\frac{1}{B}C(t)e^{-\int\frac{1}{B}dt}dt + c_1\right) = e^{\frac{t}{B}}\left(-\frac{1}{B}\int C(t)e^{-\frac{t}{B}}dt + c_1\right), \quad \textbf{(5.5)}$$

где c_1 — постоянная интегрирования.

Пусть потребление в модели возрастает во времени по экспоненциальному закону. В этом случае функцию потребления от времени можно представить следующим образом:

$$C(t) = C_0 e^{r \cdot t}.$$

Коэффициент при переменной в показатели степени экспоненты является постоянным темпом прироста. Действительно, по прошествии года темп роста потребления будет равен $\frac{C(1)}{C_0} = e^r$. Темп прироста находят как разность $e^r - 1$. Если разложить экспоненту в ряд Тейлора и ограничиться первыми двумя членами, то получим $e^r - 1 \approx 1 + r - 1 = r$. Таким образом, темп прироста равен r. Заметим, что темп прироста имеет размерность $\frac{1}{\textit{год}}$.

Подставив выражение для потребления в **(5.5)**, получим функцию выпуска от времени

$$Y(t) = e^{\frac{t}{B}} \left(-\frac{C_0}{B} \int e^{rt} e^{-\frac{t}{B}} dt + c_1 \right) = e^{\frac{t}{B}} \left(-\frac{C_0}{B} \int e^{\left(r - \frac{1}{B}\right)t} dt + c_1 \right) =$$

$$= e^{\frac{t}{B}} \left(-\frac{C_0}{B} \cdot \frac{e^{\left(r - \frac{1}{B}\right)t}}{r - \frac{1}{B}} + c_1 \right). \qquad \textbf{(5.6)}$$

Постоянную интегрирования c_1 найдем, подставив в **(5.6)** $t = 0$.

$$Y_0 = Y(0) = e^0 \left(-\frac{C_0}{B} \cdot \frac{e^0}{r - \frac{1}{B}} + c_1 \right).$$

Отсюда получим

$$c_1 = \frac{C_0}{B} \cdot \frac{1}{r - \frac{1}{B}} + Y_0 = -\frac{C_0}{1 - Br} + Y_0.$$

Подставив постоянную интегрирования в **(5.6)**, найдем

$$Y\left(t\right)=e^{\frac{t}{B}}\left(C_0\cdot\frac{e^{\left(r-\frac{1}{B}\right)t}}{1-Br}-\frac{C_0}{1-Br}+Y_0\right)=\left(Y_0-\frac{C_0}{1-Br}\right)\cdot e^{\frac{t}{B}}+\frac{C_0}{1-Br}e^{r\cdot t}. \quad \textbf{(5.7)}$$

Проведем анализ этой функции выпуска от времени. Рассмотрим несколько частных случаев.

1. Пусть $r>\frac{1}{B}$. Уже из постановки задачи следует, что общество будет проедать накопленный капитал, так как годовой темп прироста больше годовой фондоотдачи. Второе слагаемое в **(5.7)**, отвечающее за потребление, становится отрицательным, так как $1-Br<0$, что следует из условия $r>\frac{1}{B}$. Из этого же условия следует, что функция $e^{r\cdot t}$ растет быстрее функции $e^{\frac{t}{B}}$. Таким образом, через некоторое время второе слагаемое по модулю превысит первое. Из сказанного следует, что потребление будет занимать все бóльшую часть дохода и в конце концов сведет к нулю сначала инвестиции, а затем доход.

2. Положим $r<\frac{1}{B}$, т.е. темп прироста потребления ниже коэффициента капиталоотдачи. В этом случае результат заметно зависит от нормы накопления в начальный момент времени $\alpha_0=1-\frac{C_0}{Y_0}$ и от отношения нормы накопления в начальный момент времени к предельной фондоемкости.

$$\rho_0=\frac{\alpha_0}{B}=\frac{1}{B}\left(1-\frac{C_0}{Y_0}\right). \quad \textbf{(5.8)}$$

Рассмотрим несколько вариантов при различных связях r, ρ_0 и $\frac{1}{B}$.

2.1. Пусть $r=\rho_0$. Тогда $\frac{C_0}{1-Br}=\frac{C_0}{1-\frac{B}{B}\left(1-\frac{C_0}{Y_0}\right)}=Y_0$. Подставив это соотношение и **(5.8)** в формулу **(5.7)**, получим

$$Y(t) = Y_0 e^{\frac{t}{B}} \cdot e^{\left(\frac{1}{B}\left(1-\frac{C_0}{Y_0}\right)-\frac{1}{B}\right)t} = Y_0 \cdot e^{\frac{t}{B}} \cdot e^{-\frac{C_0}{BY_0}t} = Y_0 \cdot e^{\left(1-\frac{C_0}{Y_0}\right)\frac{t}{B}} = Y_0 \cdot e^{\rho_0 \cdot t}.$$

Отсюда следует, что выход растет, причем темп прироста равен коэффициенту при показателе степени экспоненты, равному ρ_0. Отсюда следует, что темп прироста прямо пропорционален норме накопления в начальный момент времени $\alpha_0 = 1 - \frac{C_0}{Y_0}$ и обратно пропорционален коэффициенту капиталоемкости B.

2.2. Пусть $\frac{1}{B} > r > \rho_0$. Это значит, что норма потребления больше коэффициента, который прямо пропорционален норме накопления в начальный момент времени. Таким образом, инвестиции могут оказаться недостаточными для нормального развития экономики. Для поставленных условий коэффициент в **(5.7)** при первом слагаемом будет отрицательным. Действительно,

$$Y_0 - \frac{C_0}{1-Br} = \frac{Y_0}{1-Br}\left(1 - Br - \frac{C_0}{Y_0}\right) = \frac{BY_0}{1-Br}\left(-r + \rho_0\right) < 0.$$

Поскольку в соотношении **(5.7)** коэффициент при показателе степени в первом слагаемом больше, чем во втором, так как $\frac{1}{B} > r$, то рано или поздно первое слагаемое по модулю превысит второе, и доход будет отрицательным.

2.3. Пусть $r < \rho_0$. Это значит, что норма потребления меньше коэффициента, который прямо пропорционален норме накопления в начальный момент времени. Таким образом, инвестиции могут оказаться слишком большими для нормального развития потребления. В этом случае при выполнении условия $\frac{1}{B} > r$ коэффициент в **(5.7)** при первом слагаемом будет положительным. Действительно,

$$Y_0 - \frac{C_0}{1-Br} = \frac{BY_0}{1-Br}\left(-r + \rho_0\right) > 0.$$

Поскольку так же, как и в предыдущем случае, в соотношении **(5.7)** коэффициент при показателе степени в первом слагаемом больше, чем во втором, то рано или поздно первое слагаемое превысит второе. В дальнейшем первое слагаемое будет все более и более подавлять второе, и процесс инвестирования будет вестись ради инвестирования, а не ради удовлетворения потребностей людей.

▷ **Пример 5.1.** Доход в начальный момент времени составляет $Y_0 = 20$, а потребление в этот момент $C_0 = 12$.

Провести исследование параметров модели для двух вариантов: 1) $r = 0,2$, $B = 8$; 2) $r = 0,2$, $B = 2$.

Р е ш е н и е. Норма накопления в начальный момент времени составила $\alpha_0 = 1 - \dfrac{C_0}{Y_0} = 1 - \dfrac{12}{20} = 0,4$.

Вариант 1. Так как $\dfrac{1}{B} = \dfrac{1}{8} = 0,125$, то этот случай соответствует условию $r > \dfrac{1}{B}$, т.е. темп прироста потребления превышает фондоотдачу. Функция дохода модели в этом случае в зависимости от времени имеет вид:

$$Y(t) = \left(20 - \frac{12}{1 - 8 \cdot 0,2}\right) \cdot e^{t/8} + \frac{12}{1 - 8 \cdot 0,2} e^{0,2 \cdot t} = 40 \cdot e^{t/8} - 20 \cdot e^{0,2 \cdot t}.$$

Потребление в модели изменяется по закону:

$$C(t) = C_0 e^{r \cdot t} = 12 e^{0,2 \cdot t}.$$

Отсюда находим закон изменения инвестиций:

$$I(t) = Y(t) - C(t) = 40 \cdot e^{t/8} - 20 \cdot e^{0,2 \cdot t} - 12 e^{0,2 \cdot t} = 40 \cdot e^{t/8} - 32 e^{0,2 \cdot t}.$$

В целях определения момента времени, для которого инвестиции будут равны нулю, надо решить уравнение

$$40 \cdot e^{t/8} - 32 e^{0,2 \cdot t} = 0 \Rightarrow \ e^{(1/8 - 0,2) \cdot t} = \frac{32}{40}; \ \ln e^{(1/8 - 0,2) \cdot t} = \ln \frac{32}{40};$$

$$-0,075t = -0,223, \ t = 3 \text{ года.}$$

Таким образом, через три года инвестиции уменьшатся до нуля. Момент времени, для которого доход будет равен нулю, находят из уравнения

$$40 \cdot e^{t/8} - 20 \cdot e^{0,2 \cdot t} = 0 \ \Rightarrow \ e^{(1/8 - 0,2) \cdot t} = 0,5; \ \ln e^{(1/8 - 0,2) \cdot t} = \ln 0,5;$$

$$-0,075t = -0,693, \ t = 9 \text{ лет.}$$

Через девять лет до нуля уменьшится доход.

Вариант 2. Находим $\rho_0 = \frac{\alpha_0}{B} = \frac{0,4}{2} = 0,2$ и $\frac{1}{B} = \frac{1}{2} = 0,5$. Этот вариант соответствует случаю, когда $r = \rho_0 = 0,2$. Находим траектории

$$Y(t) = \left(20 - \frac{12}{1-2\cdot 0,2}\right)\cdot e^{t/2} + \frac{12}{1-2\cdot 0,2}e^{0,2\cdot t} = 20\cdot e^{0,2\cdot t};$$

$$C(t) = C_0 e^{r\cdot t} = 12e^{0,2\cdot t};$$

$$I(t) = Y(t) - C(t) = 20\cdot e^{0,2\cdot t} - 12\cdot e^{0,2\cdot t} = 8\cdot e^{0,2\cdot t}.$$

Таким образом, выпуск, потребление и инвестиции развиваются с годовым приростом, равным 20%. ◀

5.3. Модель Солоу

Модель, предложенная американским экономистом, лауреатом Нобелевской премии Р. Солоу, позволяет более точно описать некоторые особенности макроэкономических процессов за счет ряда особенностей.

Производственная функция в модели Солоу нелинейная. В качестве выхода принимается внутренний валовой продукт, который будем обозначать буквой Y.

Модель учитывает выбытие основного капитала, или фондов. Величину основного капитала будем обозначать буквой K. Темп выбывших за год основных производственных фондов обозначим буквой μ.

Модель включает описание динамики трудовых ресурсов и их влияния на экономический рост. Число занятых в производстве людей, или труд, обозначим через L. Годовой темп прироста числа занятых в производстве людей обозначим буквой ν.

В модель Солоу входят также инвестиции, которые обозначаем через I. Принимается, что инвестиции изменяются прямо пропорционально внутреннему валовому продукту с коэффициентом пропорциональности ρ. Таким образом, $I = \rho Y$. Коэффициент пропорциональности ρ называется *нормой накопления*. Он показывает долю валовых инвестиций в валовом внутреннем продукте.

Потребление обозначим буквой C.

Таким образом, состояние экономики в модели Солоу задается пятью переменными, являющимися функциями времени. Время измеряется в годах.

Указанные параметры ρ, μ, ν ограничены естественными границами:

$$0 < \rho < 1,\ 0 < \mu < 1,\ -1 < \nu < 1.$$

Значения этих параметров постоянны во времени, причем норма накопления ρ считается управляющим параметром, т.е. в начальный момент времени может устанавливаться управляющим органом системы на любом уровне из области допустимых значений.

На рис. 5.1 приведена схема функционирования экономики согласно модели Солоу.

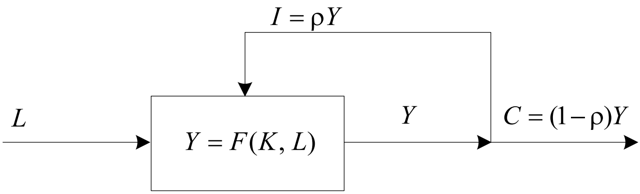


Рис. 5.1. **Схема функционирования экономики**

Предполагается, что выпуск в каждый момент времени определяется неоклассической производственной функцией $Y = F(K, L)$, например, функцией Кобба—Дугласа:

$$Y = F(K, L) = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{1-\alpha}. \quad \textbf{(5.9)}$$

Темп прироста числа занятых в производстве людей за временной интервал Δt определяется отношением $\frac{\Delta L}{L}$, где ΔL — приращение числа занятых за этот временной интервал. Годовой темп прироста числа занятых в производстве людей ν, умноженный на тот же временной интервал Δt, также равен темпу прироста числа занятых в производстве людей. Из сказанного следует: соотношение $\frac{\Delta L}{L} = \nu \Delta t$.

Переходя к дифференциалам, получим $\frac{1}{L}\frac{dL}{dt} = \nu$. Решение этого дифференциального уравнения имеет вид: $\ln L = \nu \cdot t + \ln B$, где $\ln B$ — постоянная интегрирования. Отсюда находим $L = Be^{\nu \cdot t}$. Значение B находим при подстановке в последнюю формулу $t = 0$, т.е. $L(0) = L_0 = B$. Окончательно имеем

$$L = L_0 e^{\nu \cdot t}.$$

Найдем уравнение для фондов. Из постановки задачи следует, что фонды за временной интервал dt уменьшаются за счет их выбытия и увеличиваются за счет инвестиций. Их общее изменение за этот интервал составит $dK = -\mu K dt + I dt$. Отсюда получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dK}{dt} = -\mu K + I.$$

Начальное условие для этого уравнения имеет вид: $K(0) = K_0$.

Таким образом, модель Солоу в абсолютных показателях может быть представлена в виде:

$$L = L_0 e^{\nu \cdot t}; \quad \frac{dK}{dt} = -\mu K + I; \quad K(0) = K_0;$$
$$Y = F(K, L); \quad I = \rho Y; \quad C = (1 - \rho) Y. \qquad \textbf{(5.10)}$$

Общий анализ удобно провести в удельных показателях. К таким показателям относят:

$k = \dfrac{K}{L}$ — фондовооруженность;

$y = \dfrac{Y}{L} = \dfrac{F(K, L)}{L}$ — удельный внутренний валовой продукт, или народнохозяйственная производительность труда;

$i = \dfrac{I}{L} = \rho \cdot y$ — удельные инвестиции на одного занятого;

$c = \dfrac{C}{L} = (1 - \rho) y$ — среднедушевое потребление на одного занятого.

Исследование модели Солоу проведем для производственной функции Кобба—Дугласа **(5.9)**. Для удельного внутреннего валового продукта имеем

$$y = \frac{Y}{L} = A \cdot \left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha} \cdot \left(\frac{L}{L}\right)^{1-\alpha} = A \cdot k^{\alpha} = f(k). \qquad \textbf{(5.11)}$$

В дифференциальном уравнении $\frac{dK}{dt} = -\mu K + I$ от абсолютных показателей перейдем к относительным, заменив K на kL. Таким образом, это уравнение можно записать в виде:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{d(kL)}{dt} = -\mu kL + I.$$

Так как $\frac{d(kL)}{dt} = k\frac{dL}{dt} + L\frac{dk}{dt}$ и $\frac{dL}{dt} = \nu L$, то можно записать:

$$k\nu L + L\frac{dk}{dt} = -\mu kL + I.$$

Разделив правую и левую части этого соотношения на L, получим:

$$\frac{dk}{dt} = -\nu k - \mu k + i = -(\nu + \mu)k + \rho \cdot f(k).$$

Из сказанного следует, что в удельных показателях модель Солоу приобретает вид:

$$\frac{dk}{dt} = -\lambda k + \rho \cdot f(k);\ \lambda = \nu + \mu;\ k(0) = k_0 = \frac{K_0}{L_0};$$
$$i = \rho \cdot f(k);\ c = (1-\rho) \cdot f(k). \qquad \textbf{(5.12)}$$

Изменяющиеся во времени показатели, определяемые моделью **(5.10)** и **(5.12)**, называются соответственно *абсолютными* и *относительными* траекториями.

Траектория называется *стационарной*, если показатели не изменяются во времени. Такая ситуация возможна в будущем, когда выход практически не изменяется со временем. Для стационарной траектории введем следующие обозначения:

$$k = k^0 = \text{const}; \quad y = y^0 = \text{const}; \quad i = i^0 = \text{const}; \quad c = c^0 = \text{const}.$$

Верхний индекс «ноль» у показателя указывает на то, что показатель относится к стационарной траектории.

После выхода траектории на стационарный режим производная $\frac{dk^0}{dt} = 0$. Для этого режима дифференциальное уравнение принимает вид:

$$-\lambda k^0 + \rho \cdot f(k^0) = 0, \text{ или } \lambda k^0 = \rho \cdot f(k^0). \qquad \textbf{(5.13)}$$

Поскольку функция $F(K,L)$ — неоклассическая, то $f(0)=0$, $f'(k)>0$, $f''(k)<0$. Если также задать условие $\rho \cdot f'(0)>\lambda$, то уравнение **(5.13)** будет иметь единственное ненулевое решение k^0 (рис. 5.2).

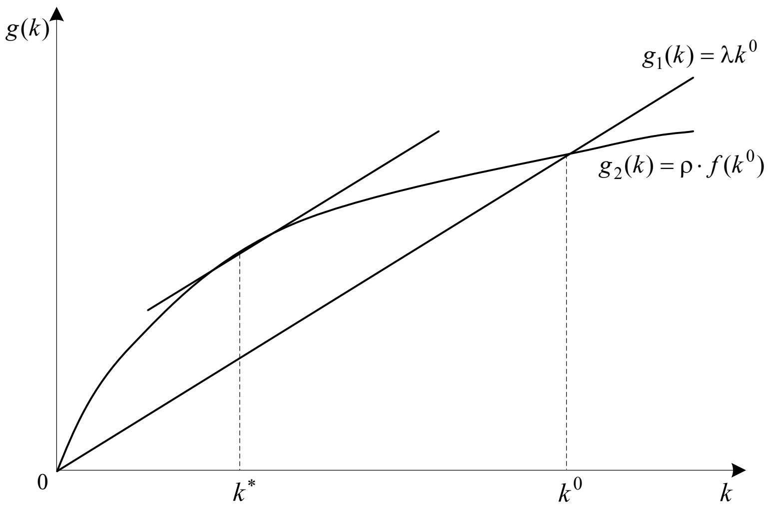


Рис. 5.2. **Графический метод решения нелинейного уравнения**

Если в начальный момент времени $k_0 = k^0$, то экономика находится на стационарной траектории и сойти с нее может только при изменении внешних условий, например, при изменении функции $Y = F(K,L)$ (переход к новым технологиям). При $k \neq k^0$ в экономике будет происходить переходной режим, который закончится установлением стационарного режима.

Точку k^0 находят из уравнения **(5.13)**, подставив туда **(5.11)**:

$$\lambda k^0 = \rho \cdot A \cdot \left(k^0\right)^\alpha.$$

Решим это уравнение относительно k^0:

$$\left(k^0\right)^{1-\alpha} = \frac{\rho \cdot A}{\lambda}; \; k^0 = \left(\frac{\rho \cdot A}{\lambda}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \quad \textbf{(5.14)}$$

На рис. 5.2 введено обозначение $k = k^*$, при котором скорости роста функций $g_1(k) = \lambda k^0$ (левая часть уравнения **(5.13)**) и $g_2(k) = \rho \cdot f(k^0)$ (правая часть уравнения **(5.13)**) равны. Значение k^* является решением уравнения, которое получается путем приравнивания производных функций $g_1(k)$ и $g_2(k)$:

$$\rho \cdot f'(k) = \lambda. \qquad \textbf{(5.15)}$$

Точку k^* находим из этого уравнения, подставив туда производную от **(5.11)**, равную $y'_k = \alpha \cdot A \cdot k^{\alpha-1}$:

$$\rho \cdot \alpha \cdot A \cdot k^{\alpha-1} = \lambda; \;\; k^{1-\alpha} = \frac{\alpha \cdot \rho \cdot A}{\lambda}; \;\; k^* = \left(\frac{\alpha \cdot \rho \cdot A}{\lambda}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \qquad \textbf{(5.16)}$$

Для описания переходного режима необходимо решить дифференциальное уравнение из **(5.12)**, которое для производственной функции Кобба—Дугласа **(5.11)** приобретает вид:

$$\frac{dk}{dt} = -\lambda k + \rho \cdot A \cdot k^{\alpha}.$$

Введя замену $k = ue^{-\lambda \cdot t}$, получим

$$\frac{du}{dt} \cdot e^{-\lambda \cdot t} - u \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t} = -\lambda \cdot u \cdot e^{-\lambda \cdot t} + \rho \cdot A \cdot u^{\alpha} \cdot e^{-\alpha \cdot \lambda \cdot t},$$

или

$$\frac{du}{dt} = \rho \cdot A \cdot u^{\alpha} \cdot e^{(1-\alpha) \cdot \lambda \cdot t}.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{du}{u^{\alpha}} = \rho \cdot A \cdot e^{(1-\alpha) \cdot \lambda \cdot t} dt.$$

Его решение имеет вид:

$$\frac{u^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \frac{\rho \cdot A \cdot e^{(1-\alpha) \cdot \lambda \cdot t}}{\lambda(1-\alpha)} + c_1.$$

Постоянную интегрирования находим из условия $t = 0$, $u(0) = k_0$:

$$c_1 = \frac{k_0^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{\rho \cdot A}{\lambda(1-\alpha)}.$$

Подставив выражение для постоянной интегрирования в предыдущую формулу, получим

$$u = \left(\frac{\rho \cdot A \cdot e^{(1-\alpha)\cdot\lambda\cdot t}}{\lambda} + k_0^{1-\alpha} - \frac{\rho \cdot A}{\lambda} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Так как для стационарной траектории справедливо соотношение $\left(k^0\right)^{1-\alpha} = \frac{\rho \cdot A}{\lambda}$ (см. **(5.14)**), то формулу для u можно записать в виде:

$$u = \left(\left(k^0\right)^{1-\alpha} \cdot e^{(1-\alpha)\cdot\lambda\cdot t} + k_0^{1-\alpha} - \left(k^0\right)^{1-\alpha} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Учитывая, что $u = k(t) e^{\lambda\cdot t}$, найдем

$$k(t) = \left\{ \left(k^0\right)^{1-\alpha} \cdot e^{(1-\alpha)\cdot\lambda\cdot t} \cdot e^{-(1-\alpha)\cdot\lambda\cdot t} + \left[\left(k_0^{1-\alpha} - \left(k^0\right)^{1-\alpha} \right) \right] \cdot e^{-(1-\alpha)\cdot\lambda\cdot t} \right\}^{1/(1-\alpha)}.$$

Окончательно получим

$$k(t) = \left(\left(k^0\right)^{1-\alpha} + \left(k_0^{1-\alpha} - \left(k^0\right)^{1-\alpha} \right) \cdot e^{-(1-\alpha)\lambda t} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \qquad \textbf{(5.17)}$$

Отсюда, в частности, следует, что при стремлении времени к бесконечности траектория выходит на стационарный режим, т.е. народнохозяйственная производительность труда стремится к k^0. Действительно,

$$\lim_{t\to\infty} k(t) = k^0.$$

Вид переходного процесса, определяемого траекторией **(5.17)**, зависит от соотношения величин k_0, k^* и k^0. Первая производная фондовооруженности k от времени, являющаяся исходным дифференциальным уравнением $\frac{dk}{dt} = -\lambda k + \rho \cdot A \cdot k^{\alpha}$, будет положительной при возрастающей функции и отрицательной — при убывающей. Положив первую производную положительной, получим

$$-\lambda k + \rho \cdot A \cdot k^{\alpha} > 0; \quad \frac{\rho \cdot A}{\lambda} > k^{1-\alpha}.$$

Учитывая, что $\left(k^0\right)^{1-\alpha} = \frac{\rho \cdot A}{\lambda}$, запишем $\left(k^0\right)^{1-\alpha} > k^{1-\alpha}$. Отсюда следует, что переходной процесс будет возрастающим при $k < k^0$. Аналогично можно показать, что переходной процесс будут убывающим при $k > k^0$.

Проведем исследование функции **(5.17)** на наличие точки перегиба. Для этих целей определим вторую производную и приравняем ее нулю:

$$\frac{d^2k}{dt^2} = -\lambda \frac{dk}{dt} + \rho \cdot A \cdot \frac{dk^{\alpha}}{dt} = \left(-\lambda + \alpha \cdot \rho \cdot A \cdot k^{\alpha-1}\right)\frac{dk}{dt} = 0.$$

Точка перегиба имеет место при

$$k^{1-\alpha} = \frac{\alpha \cdot \rho \cdot A}{\lambda}; \quad k = \left(\frac{\alpha \cdot \rho \cdot A}{\lambda}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Сопоставив полученное решение с приведенной ранее формулой для вычисления абсциссы $k = k^*$, при которой скорость роста функций $g_2(k)$ равна росту скорости функции, видим, что эти формулы совпали. Отсюда находим, что абсцисса точки перегиба равна

$$k = k^*.$$

В общем случае для траектории фондовооруженности выделяют т р и типа переходного процесса. Эти типы зависят от соотношения трех абсцисс: k_0, k^* и k^0.

1. Пусть $k_0 < k^*$. В этом случае с начала процесса до достижения точки перегиба имеем ускоренный рост фондовооруженности. При достижении точки перегиба этот процесс сменяется замедленным ростом. На рис. 5.3 эта траектория помечена цифрой 1. В пределе при $t \to \infty$ траектория стремится к k^0.

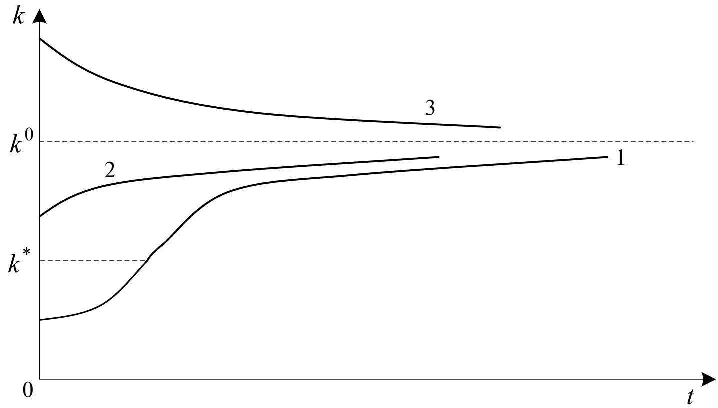


Рис. 5.3. **Типы траекторий фондовооруженности**

2. При выполнении условий $\hat{k} < k_0 < k^0$ имеет место замедленный рост фондовооруженности. На рис. 5.12 эта траектория помечена цифрой 2. В пределе при $t \to \infty$ траектория стремится к k^0.

3. Если в начале процесса фондовооруженность превышает свое стационарное значение, т.е. если выполняется условие $k_0 > k^0$, то траектория фондовооруженности является убывающей. Это говорит о том, что общество проедает фонды.

5.4. «Золотое правило» накопления

Оптимальная норма накопления предложена Э. Фелпсом. Эту норму называют «золотым правилом» накопления. Она обеспечивает экономический рост с максимальным уровнем потребления.

На стационарной траектории функция удельного потребления имеет вид:

$$c^0 = (1-\rho)\, y^0 = (1-\rho)\, A \cdot \left(k^0\right)^{\alpha}.$$

Возведя левую и правую части полученного выше соотношения $\frac{\rho \cdot A}{\lambda} = \left(k^0\right)^{1-\alpha}$ в степень $\frac{\alpha}{1+\alpha}$, получим

$$\left(\frac{\rho \cdot A}{\lambda}\right)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} = \left(k^0\right)^{\alpha}.$$

Подставив последнее выражение в формулу для стационарной траектории функции удельного потребления, найдем

$$c^0 = (1-\rho)A \cdot \left(\frac{\rho \cdot A}{\lambda}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = \left(\frac{A}{\lambda^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \cdot (1-\rho)\rho^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}.$$

Эта функция от нормы накопления ρ имеет максимум. Для определения абсциссы этого максимума продифференцируем функцию удельного потребления по норме накопления и приравняем производную нулю. Решив полученное уравнение, найдем абсциссу экстремума:

$$\frac{dc^0}{d\rho} = \left(\frac{A}{\lambda^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \cdot \left[-\rho^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} + \frac{\alpha}{1-\alpha}(1-\rho)\rho^{\frac{\alpha}{1-\alpha}-1}\right] =$$

$$= \left(\frac{A}{\lambda^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \cdot \frac{\rho^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{1-\alpha}\left(-1+\alpha+\alpha\frac{1-\rho}{\rho}\right) = \left(\frac{A}{\lambda^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \cdot \frac{\rho^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{1-\alpha}\left(-1+\frac{\alpha}{\rho}\right) = 0.$$

В точке $\rho_{\max} = \alpha$ имеет место максимум функции, так как левее этой точки производная положительна, т.е. функция возрастает, а правее — отрицательна, т.е. функция убывает. Таким образом, наибольшее потребление достигается при равенстве нормы накопления эластичности выпуска по фондам. Функция удельного потребления для стационарной траектории представлена на рис. 5.4.

Рис. 5.4. **График функции удельного потребления для стационарной траектории**

Обычно в реальных экономиках норма накопления всегда меньше оптимального значения, т.е. имеет место недонакопление.

Удельное потребление в любой точке траектории определяется соотношением

$$c = (1-\rho)\,y = (1-\rho)\,A \cdot k^{\alpha} =$$
$$= (1-\rho)\,A \cdot \left(\left(k^0\right)^{1-\alpha} + \left(k_0^{1-\alpha} - \left(k^0\right)^{1-\alpha} \right) \cdot e^{-(1-\alpha)\lambda t} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}.$$

Установив $\rho = \alpha$, получим оптимальную траекторию удельного потребления:

$$c = (1-\alpha)\,A \cdot \left(\left(k^0\right)^{1-\alpha} + \left(k_0^{1-\alpha} - \left(k^0\right)^{1-\alpha} \right) \cdot e^{-(1-\alpha)\lambda \cdot t} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}.$$

Начальное потребление в этом случае составит $c_0 = (1-\alpha)\,A \cdot k_0^{\alpha}$, а на стационарной траектории —

$$c^0 = (1-\alpha)\,A \cdot \left(k^0\right)^{\alpha} = (1-\alpha) \cdot \left(A^{\frac{1}{\alpha}} \cdot k^0 \right)^{\alpha} = (1-\alpha) \cdot \left(\frac{\alpha \cdot A}{\lambda^{\alpha}} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

При выполнении условия $\rho < \alpha$ начальное потребление будет равно:

$$\tilde{c}_0 = (1-\rho)\,A \cdot k_0^{\alpha},$$

а на стационарной траектории –

$$\tilde{c}^0 = (1-\rho)A \cdot \left(k^0\right)^{\alpha} = (1-\rho)A \cdot \left(\frac{\rho \cdot A}{\lambda}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}.$$

Можно показать, что при $\rho < \alpha$ выполняются соотношения

$$\tilde{c}_0 > c_0 \text{, а } \tilde{c}^0 < c^0 .$$

Исходя из этого, траектории удельного потребления для $\rho = \alpha$ и $\rho < \alpha$ представлены на рис. 5.5.

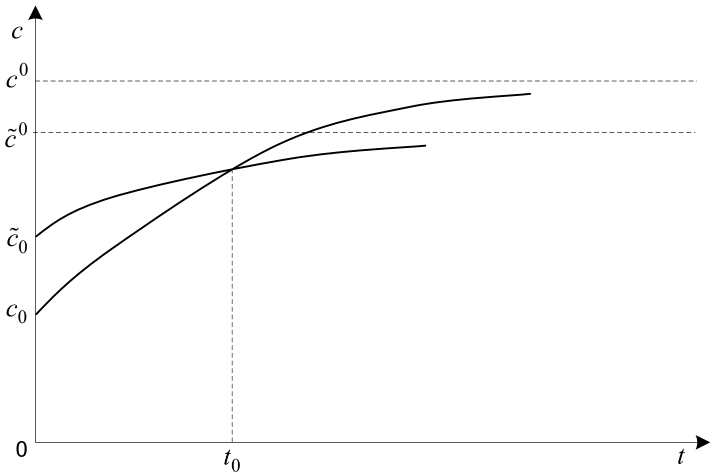


Рис. 5.5. **Траектории удельного потребления при недонакоплении и при $\rho = \alpha$**

Из графиков рис. 5.5 видно, что выигрыш в текущем потреблении при недонакоплении приводит к проигрышу в ближайшей перспективе по сравнению с оптимальным случаем. При наступлении момента t_0 текущее потребление и в том и в другом случае будет одинаковым. Затем потребление при недонакоплении будет меньше оптимального.

Упражнения

Задача 5.1. Норма накопления в начальный момент времени составила $\alpha_0 = 1 - \frac{C_0}{Y_0} = 0,5$, причем доход в начальный момент равняется $Y_0 = 10$.

Провести исследование параметров модели при следующих условиях:

А. $r = 0,2$, $\rho_0 = \frac{\alpha_0}{B} = \frac{0,5}{2,5} = 0,2$, т.е. $\frac{1}{B} = 0,1$.

Б. $r = 0,2$, $B = 2,5$, т.е. $\rho_0 = \frac{\alpha_0}{B} = \frac{0,5}{2,5} = 0,2$.

В. $B = 2,5$, $B = 2,5$, т.е. $\rho_0 = \frac{\alpha_0}{B} = \frac{0,5}{2,5} = 0,2$.

Г. $r = 0,1$, $B = 2,5$, т.е. $\rho_0 = \frac{\alpha_0}{B} = \frac{0,5}{2,5} = 0,2$.

Задача 5.2. Производственная функция валового выпуска страны имеет вид $Y = K^{0,4}L^{0,6}$. Валовой внутренний продукт и основные производственные фонды представлены в млрд руб., а численность занятых — в млн чел. Норма накопления принимается равной $\rho = 0,2$, доля выбывших за год основных производственных фондов — $\mu = 0,03$, годовой темп прироста числа занятых в производстве — $\nu = 0,02$, удельная фондовооруженность в начальный момент времени — $k_0 = 4000$ руб./чел.

Определить удельную фондовооруженность k^0 на стационарной траектории и точку k^*, народнохозяйственную производительность труда на стационарной траектории, удельные инвестиции на одного занятого на стационарной траектории, среднедушевое потребление на одного занятого на стационарной траектории и в начальный момент времени, а также время переходного процесса.

Задача 5.3. Условия задачи 5.2. Норма накопления принимается равной $\rho = 0,4$.

Библиографический список

1. *Агапова Т.А., Серегина С.Ф.* Макроэкономика. М.: ДиС, 1997.
2. *Вечканов Г.С., Вечканова Г.Р.* Макроэкономика. М.: Питер, 2006.
3. *Колемаев В.А.* Математическая экономика. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005.
4. *Колемаев В.А.* Экономико-математическое моделирование. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005.
5. *Кузнецов Б.Т.* Математика. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004.

Часть II

Макроэкономическое равновесие на рынках

Глава 6

Макроэкономическое равновесие на товарном рынке

6.1. Понятие макроэкономического равновесия

Макроэкономическое равновесие — это состояние экономики страны, при котором сложившиеся в ней экономические отношения обеспечивают оптимальное сочетание товарных и денежных потоков, стабильность цен, непрерывный процесс воспроизводства в общегосударственном масштабе и процесс функционирования этой экономики в целом [1—6].

Экономическая система состоит из множества составляющих, она динамична и постоянно изменяется. К составляющим экономической системы, состояние которых друг относительно друга определяет равновесие, относятся стабильность цен, спрос и предложение, платежный баланс, рабочая сила, сбережения и инвестиции, денежная масса.

Идеальное равновесие исключает возможность банкротств, кризисов и других негативных непредвиденных явлений. Поэтому идеальное равновесие, как и все идеальное, недостижимо.

Составляющие экономической системы, определяющие равновесие, взаимодействуют на рынках. К таким рынкам относят рынок товаров и услуг, рынок труда, рынок денег, международный финансовый рынок. Центральным звеном общей системы рынков является рынок товаров и услуг.

Рынок товаров и услуг — это совокупность отношений, связанных с куплей и продажей благ, произведенных в экономике страны в течение заданного периода и предназначенных для конечного использования.

Основными понятиями рынка являются товары (услуги) и их цены, участники рынка, спрос и предложение этих участников. Эти элементы являются основой при моделировании рынка.

К участникам рынка относят прежде всего производителей и потребителей, или продавцов и покупателей. К этим участникам могут относиться индивидуальные потребители, фирмы, отрасли, регионы, страны. Если продавцов или покупателей много, то между ними возникает конкуренция. Рассматривают несколько типов конкуренции:

- сделка — один продавец и один покупатель;
- олигопсония — один продавец и несколько покупателей;
- монополия — один продавец и много покупателей;
- олигополия — несколько продавцов и один, несколько или много покупателей;
- монопсония — много продавцов и один покупатель;
- олигопсония — много продавцов и несколько покупателей;
- совершенная конкуренция — много продавцов и много покупателей.

Считается, что макроэкономическое равновесие возможно при наличии совершенной конкуренции.

В макроэкономике обычно рассматривают многотоварный рынок с большим числом участников. Поэтому спрос и предложение рассматриваются как совокупные относительно имеющихся на рынке товаров. Совокупный потребитель понимается как один участник рынка, а совокупный производитель — как другой.

Известны несколько подходов описания и установления макроэкономического равновесия. Наиболее распространенными являются классический и кейнсианский подходы. Они по-разному отвечают на основной вопрос теории о возможности рыночного механизма обеспечить равенство совокупного спроса и совокупного предложения при полной занятости. Дж.М. Кейнс разработал свою теорию, когда на примере развития экономики в период Великой депрессии конца 1920-х и начала 1930-х гг. убедился, что подходы и результаты классической теории несправедливы. Основные положения теории опубликованы в книге «Общая теория занятости, процента и денег».

6.2. Классическая модель макроэкономического равновесия

Классическая модель макроэкономического равновесия описывает состояние экономики в долгосрочном периоде при соблюдении условий совершенной конкуренции.

В основе классической модели макроэкономического равновесия лежат следующие условия.

1. Произведенный объем продукции обеспечивает суммарный доход, равный ценности всех произведенных товаров и услуг. Поэтому этот доход достаточен для полной реализации этих товаров и услуг. Тогда недопроизводство или перепроизводство в долговременной перспективе невозможно. Если в кратковременном периоде изменяется выпуск продукции и увеличивается безработица, то внутренние силы рыночной экономики приведут ее в равновесие. Если часть дохода откладывается в виде накопления наличных денег, т.е. инвестиции не совпадают со сбережениями, то и это обстоятельство не помешает установлению общего макроэкономического равновесия. Выравнивание произойдет в краткосрочном периоде за счет повышения процентной ставки, т.е. платы за капитал.

2. Изменения в факторах производства происходят медленно. Например, медленно изменяются технологии, новые технологии постепенно вытесняют старые. Труд и капитал также не могут иметь резких скачков, и их изменения успевают приспособиться к равновесному состоянию экономики.

3. Объем выпуска равен потенциальному. Он зависит только от существующего труда и капитала, т.е. от существующих факторов производства. А это значит, что задействованы все средства производства и вся рабочая сила. Отсутствует безработица. Возможны только ее временные колебания, которые выравниваются за счет действия рыночных сил.

4. Цены на рынке товаров и услуг и на рынке труда гибкие. А это обеспечивает равновесие на рынке товаров и услуг, рынке труда и рынке денег. Недопроизводство или перепроизводство в долговременной перспективе невозможно, так как изменение цен расчищает рынок. В случае недопроизводства товаров цены повышаются, а при перепроизводстве — уменьшаются. Измениться может только денежная масса, которая ничего не меняет в реальном объеме товаров и услуг, а влияет лишь на номинальные величины. Реальные же величины остаются неизменными. Обычно считают, что номинальная величина (цена, заработная плата, процентная ставка) состоит из реальной части, на которую накладываются инфляционные показатели. Таким образом, величина денежной массы практически не влияет на макроэкономическое равновесие.

6.3. Модель совокупного спроса

Совокупным спросом называется сумма всех товаров и услуг, которые могут быть куплены при заданном уровне цен. Под совокупным спросом обычно понимают какой-либо показатель макроэкономики. Чаще всего это валовой внутренний продукт. Совокупный спрос отражает функциональную связь количества продукции, которое может быть куплено, от цены. К расходам, определяемым совокупным спросом, относят:

- потребительские расходы домохозяйств;
- расходы на частные внутренние инвестиции;
- государственные закупки;
- чистый экспорт.

Потребительские расходы домохозяйств определяются величиной личного дохода частных лиц за вычетом уплаченных доходов. В России эти расходы составляют 50% общих расходов, в США — 67% [6].

К расходам на частные внутренние инвестиции в макроэкономике относят затраты на покупку недвижимости, оборудования, запасов.

Государственные закупки включают расходы правительственных органов всех уровней на оплату услуг, например, образования и здравоохранения, выплату заработной платы государственным чиновникам. Сюда же относится закупка оружия. Доля государственных закупок зависит от степени участия государства в перераспределении доходов, от размеров налоговых платежей.

Чистый экспорт равен разности между экспортом и импортом.

Функция совокупного спроса, график которой обозначается двумя английскими буквами AD (aggregate demand), показывает количество товаров и услуг, которое будет куплено при различных уровнях цен. При повышении цен совокупное количество купленных товаров понижается, т.е. понижается спрос. Поэтому функция спроса от цены будет невозрастающей. Пример кривой совокупного спроса $Y(P)$ представлен на рис. 6.1. Здесь введены обозначения: P — уровень цен в экономике; Y — объем выпуска, на который предъявлен спрос. Объемом выпуска обычно является валовой внутренний продукт.

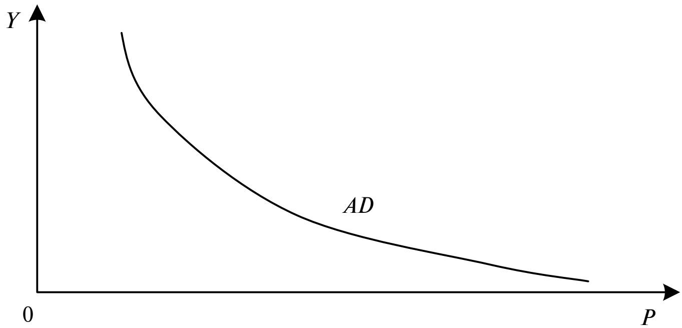


Рис. 6.1. **График функции совокупного спроса $Y(P)$**

Формула для связи количества денег в экономике M, уровня цен P и объема выпуска Y в натуральном исчислении, полученная представителями классической кембриджской школы [4], имеет вид:

$$M = kYP,$$

где k — коэффициент пропорциональности.

Отсюда можно найти выражение для связи уровня цен P и объема выпуска Y:

$$Y = \frac{M}{k \cdot P}.$$

Эта формула подтверждает тот факт, что функция совокупного спроса является убывающей. То есть при постоянном количестве денег в экономике при росте цен P возможное количество проданных товаров сокращается.

Теория Кейнса объясняет эффект убывания функции совокупного спроса при помощи процентной ставки, определяющей стоимость капитала. Этот факт можно пояснить следующей последовательностью рассуждений:

- с ростом цен растет спрос на деньги;
- при неизменном количестве денег в экономике растет процентная ставка;
- уменьшается количество инвестиций в экономику;
- потребители не хотят заимствовать под высокие процентные ставки;
- снижается объем совокупного спроса, т.е. функция убывает.

Еще одно объяснение убывания функции совокупного спроса связано с уменьшением богатства людей из-за повышения цен. В этом случае люди начинают меньше потреблять, а значит, уменьшается спрос.

На форму графика функции совокупного спроса оказывает влияние также эффект импортных закупок. Повышение цен в стране способствует увеличению импорта в эту страну. С другой стороны, из-за роста цен иностранные потребители воздержатся от покупок товаров рассматриваемой страны, т.е. снизится экспорт. Из сказанного следует, что чистый экспорт уменьшится. А это приведет к сокращению совокупного спроса.

График совокупного спроса обычно строят в системе координат $Y0P$. Функция $P(Y)$ является обратной относительно функции $Y(P)$. На рис. 6.2 приведен пример графика функции $P(Y)$.

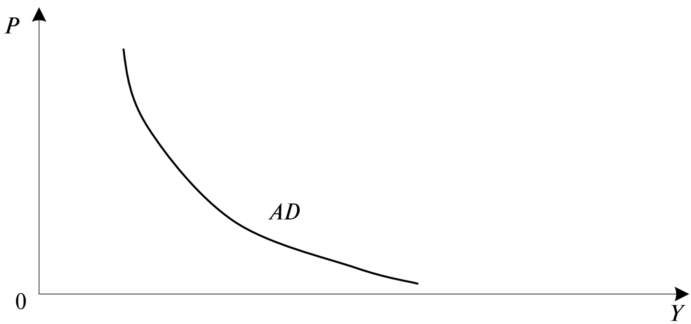


Рис. 6.2. **График функции совокупного спроса** $P(Y)$

На совокупный спрос помимо цены влияют также неценовые факторы. На изменение спроса могут влиять изменения благосостояния потребителей, например, повышение их дохода за счет снижения подоходного налога. Снижение налоговых ставок увеличивает инвестиционный и потребительский спрос. Кривая AD сдвинется вправо, т.е. из положения AD_1 перейдет в положение AD_2 (рис. 6.3). Увеличение налоговых ставок приведет к смещению кривой влево. Кривая AD_1 займет положение AD_3.

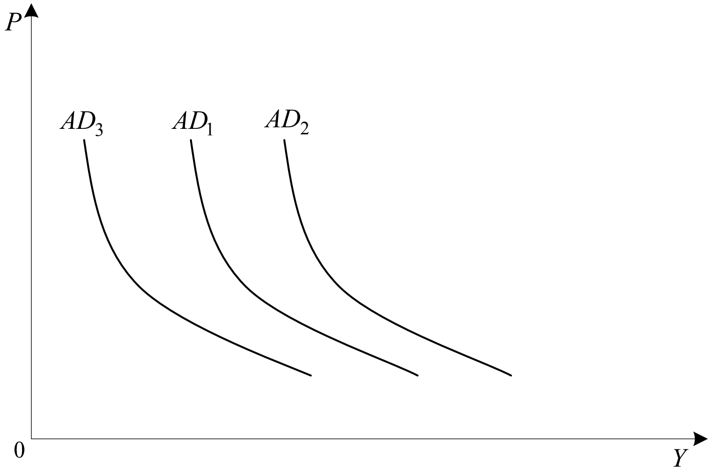


Рис. 6.3. **Смещение кривой совокупного спроса**

Увеличение количества денег в экономике M приведет к изменению совокупного спроса. Это будет стимулировать увеличение инвестиционных и потребительских расходов. Поэтому совокупный спрос увеличится, и кривая *AD* сдвинется вправо (см. рис. 6.3), т.е. кривая AD_1 займет положение AD_2. Снижение количества денег в экономике приведет к сдвигу кривой *AD* влево (см. рис. 6.3), т.е. кривая AD_1 заняла положение AD_3. Сдвиг кривой совокупного спроса в результате неожиданных изменений неценовых факторов называют *шоком совокупного спроса*.

К неценовым факторам, влияющим на совокупный спрос, относятся также изменения в предпочтениях потребителя, изменение инфляционных ожиданий потребителей, изменения в условиях предоставления кредита.

6.4. Модель совокупного предложения

Совокупное предложение — это общее количество товаров и услуг, которое может быть предложено, или произведено, при разном уровне цен. Совокупным предложением может являться валовой внутренний продукт.

Кривая совокупного предложения *AS* (aggregate supply) показывает объем совокупного выпуска, который может быть предложен на рынке производителями при различных значениях общего уровня цен.

Рассматривают модель совокупного предложения для долгосрочного и краткосрочного периодов. *Долгосрочная модель*, называемая классической (неоклассической), рассматривает ситуацию, когда в течение исследуемого периода цены на ресурсы успевают приспособиться к ценам на товары так, что в экономике поддерживается полная занятость. Это происходит тогда, когда государство не вмешивается в работу рыночного механизма. Экономика функционирует на уровне, соответствующем потенциальным возможностям. Достигается такое предельное значение выпуска, или ВВП, что в ответ на увеличение совокупного спроса возможностей для расширения экономики в долгосрочном плане больше нет, так как используются все возможные ресурсы (все мощности загружены, вся рабочая сила занята). Поэтому реакция производителей товаров и услуг на повышение совокупного предложения будет заключаться в повышении цен. А это значит, что ВВП остается на том же уровне, а цены растут, т.е. графиком функции спроса является прямая линия, параллельная оси $0P$. График функции совокупного предложения для классической модели в системе координат $Y0P$ представлен на рис. 6.4.

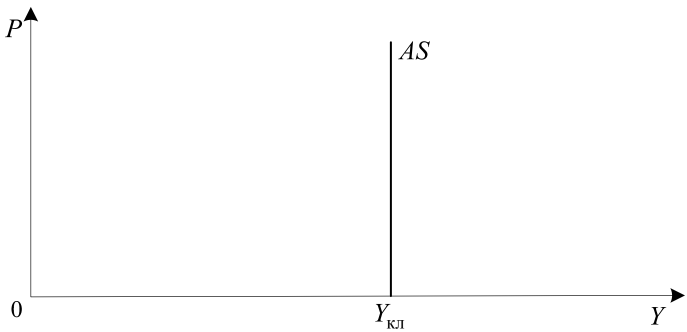


Рис. 6.4. **График функции предложения для долгосрочного периода**

Вид графика функции совокупного предложения для долгосрочного периода в экономической теории объясняется динамикой издержек на ресурсы. Основным ресурсом является рабочая сила. Рост общего уровня цен снижает реальную заработную плату рабочих. Это вызывает трудности с набором новых работников. Спрос на труд превысит предложения рынка труда. В результате реальная заработная плата повысится до исходной, что восстановит равновесие на рынке труда и прежний уровень занятости, но практически не изменит выпуск. Возможны лишь незначительные краткосрочные колебания. Таким образом, при любом изменении уровня цен выпуск остается на том же уровне $Y_{кл}$.

Сдвиги графика функции совокупного предложения для долгосрочного периода возможны только при изменении факторов производства или технологии.

Рассмотрим теперь *краткосрочную модель* совокупного предложения, названную по имени ее создателя кейнсианской. Эта модель основана на следующих положениях:

- неполная занятость в экономике;
- цены на товары и заработная плата не изменяются во времени.

Эти положения определяются тем, что экономика находится в состоянии депрессии. Поэтому мощности загружены не полностью, много свободной рабочей силы (безработица). Такая экономика в ответ на увеличение совокупного спроса за счет привлечения свободных ресурсов увеличивает реальный ВВП без повышения уровня цен. Это происходит потому, что вовлечение в производство незанятой рабочей силы не будет сопровождаться требованиями о повышении заработной платы. Инвесторы в таких условиях также не будут требовать повышения доходности (повышенных процентных ставок, или платы за капитал). Из сказанного следует, что графиком функции совокупного предложения является прямая линия, параллельная оси $0Y$. Этот график в системе координат $Y0P$ представлен на рис. 6.5. Такая ситуация будет сохраняться до тех пор, пока не начнут нарушаться условия для краткосрочной модели совокупного предложения. После превышения выпуска, обозначенного на рис. 6.5 $Y_{Кейнс}$, начнет возникать дефицит в свободных ресурсах, и график начнет менять свой вид.

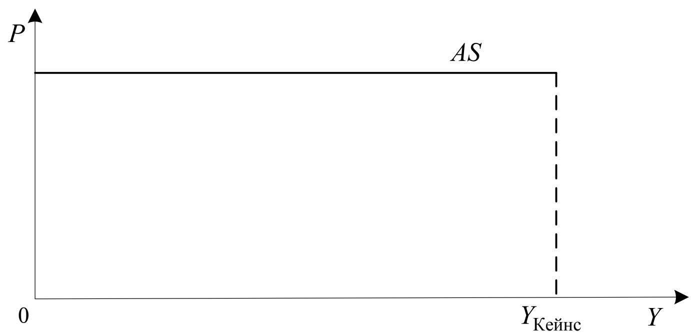


Рис. 6.5. **График функции предложения для краткосрочного периода**

Наиболее часто кейнсианский график функции совокупного предложения представляют в виде возрастающей функции (рис. 6.6). К смещению графика функции совокупного предложения приводят различные неценовые факторы.

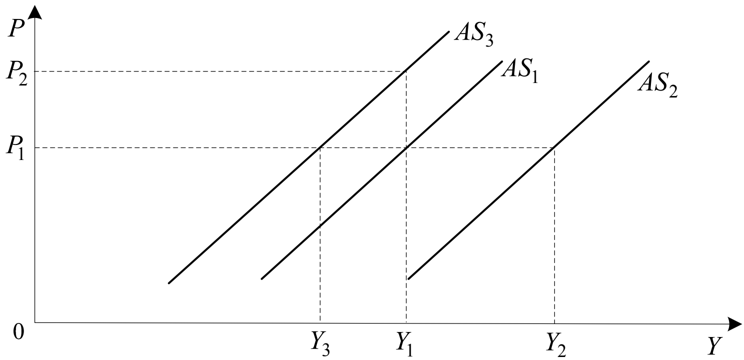


Рис. 6.6. **Влияние неценовых факторов на сдвиг графика функции совокупного предложения**

Например, повышение заработной платы приводит к повышению цены с P_1 до P_2. А это, в свою очередь, приведет к смещению графика влево, т.е. из положения AS_1 в положение AS_3. При этом при заданном уровне цен (на графике это P_1) выпуск Y_1 снижается до Y_3. Снижение заработной платы приведет к смещению графика вправо.

Так же как и для совокупного спроса, сдвиг кривой предложения в результате неожиданных изменений неценовых факторов называют *шоком совокупного предложения*.

График функции совокупного предложения будет смещаться также при изменении цен на сырье и материалы. Повышение этих цен смещает график влево, а повышение — вправо.

Причинами, вызывающими сдвиг графика, могут являться усиление (влево) или ослабление (вправо) монопольной власти поставщиков ресурсов. Усиление (влево) или ослабление (вправо) налоговых ставок также вызывают сдвиг графика.

Долгосрочную и краткосрочную модели совокупного предложения можно объединить в одну модель [3]. График объединенной модели представлен на рис. 6.7.

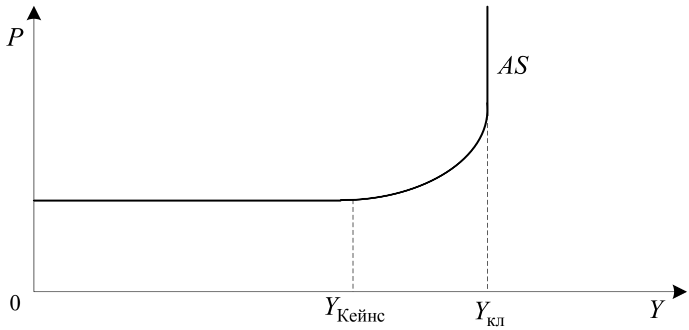


Рис. 6.7. **График функции предложения для объединенной модели**

Часть графика на интервале от 0 до $Y_{\text{Кейнс}}$ характеризует кейнсианский подход к модели совокупного предложения, а другая часть — в виде вертикальной линии — классический подход. Средняя часть графика на интервале от $Y_{\text{Кейнс}}$ до $Y_{\text{кл}}$ характеризует промежуточное состояние, приближающееся к уровню полной занятости. Промежуточная часть графика показывает, что при увеличении цены производитель будет расширять производство и увеличивать выпуск. Объяснить ход этой кривой можно, если использовать эффект издержек производства. По мере приближения к уровню потенциального ВВП незанятых ресурсов становится все меньше, повышается оплата за привлеченный труд и капитал. Эти расходы компенсируются повышением цен.

6.5. Макроэкономическое равновесие в модели *AD—AS*

Макроэкономика находится в равновесии в точке пересечения кривых совокупного спроса *AD* и совокупного предложения *AS*. Равновесие — это такое состояние экономики, когда объем произведенной продукции (валовой внутренний продукт) равен совокупному спросу. В модели *AD—AS* можно рассмотреть три варианта макроэкономического равновесия:

1) в условиях полной занятости;
2) в условиях депрессии;
3) в условиях перехода от депрессии к полной занятости.

Для этих целей можно использовать объединенную модель совокупного предложения [3], график которой представлен на рис. 6.7. Возможны три варианта равновесия, когда линия совокупного спроса пересекает линию совокупного предложения в области кейнсианской модели на интервале от 0 до $Y_{\text{Кейнс}}$, , в области классической модели в точке $Y_{\text{кл}}$ и на переходном интервале от $Y_{\text{Кейнс}}$ до $Y_{\text{кл}}$.

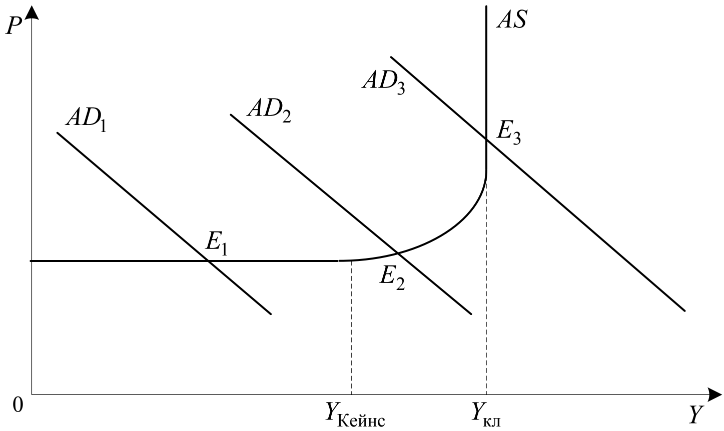


Рис. 6.7. **Макроэкономическое равновесие в модели** *AD—AS*

Точка E_1 характеризует макроэкономическое равновесие при неполной занятости и при стабильном уровне цен и заработной платы, т.е. в отсутствии инфляции. Отклонение от точки равновесия в этом случае будет преодолеваться за счет колебаний выпуска при стабильном уровне цен. Предприятия будут расширять или сокращать выпуск товаров и услуг.

Точка E_2 является точкой макроэкономического равновесия для нормального кейнсианского случая. Это условия, близкие к полной занятости. Возвращение в точку равновесия при возможных отклонениях от этой точки будут происходить как за счет изменения объема выпуска, так и за счет колебания цен.

Равновесие в точке E_3 характеризуется полной занятостью при изменении цен и заработной платы, т.е. за счет инфляции. Таким образом, при отклонениях от точки равновесия возвращение в эту точку возможно только за счет инфляции.

Выше было упомянуто о шоках совокупного спроса и совокупного предложения. Шоки совокупного спроса возникают за счет резкого изменения денежной массы, благосостояния потребителей и т.д. Шоки совокупного предложения могут быть связаны с резким повышением заработной платы, со скачками цен на энергоносители, стихийными бедствиями и пр.

Рассмотрим пример шока, связанного с резким повышением цен на энергоносители. Пусть в экономике имеет место функция спроса, представленная на рис. 6.8 линией AD_1, и функция предложения, представленная линией AS_1. Равновесие обеспечивается количеством товаров и услуг Y_1, которое будет куплено при уровнях цен P_1.

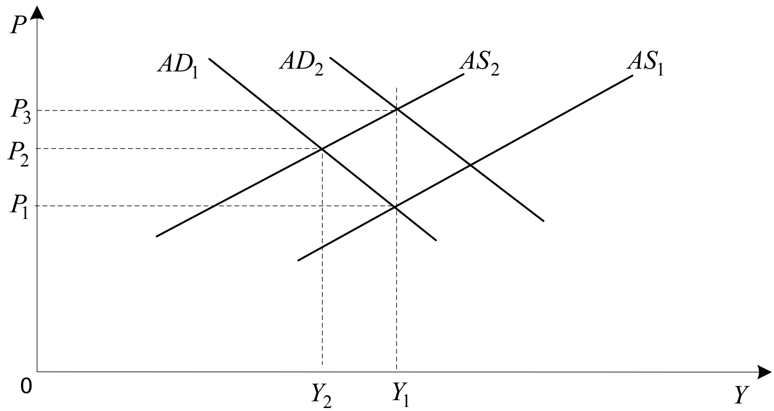


Рис. 6.8. **Влияние шока на макроэкономическое равновесие**

При неожиданном повышении цен на энергоносители линия совокупного предложения AS_1 сдвинется влево и займет положение AS_2. Произойдет падение выпуска до Y_2, а цены поднимутся до P_2. Если не предпринять никаких шагов, то экономика будет приспосабливаться к новой ситуации. Цены начнут постепенно снижаться, а уровень занятости и выпуска увеличится до прежнего. Экономика вернется в исходное состояние, т.е. в точку (Y_1, P_1). В данном случае шок привел к длительному спаду, характеризующемуся безработицей и ростом цен, т.е. к снижению благосостояния людей.

Другой подход состоит во вмешательстве государства в экономические взаимоотношения. Это вмешательство сводится к нейтрализации спада за счет увеличения массы денег. Это увеличение приведет к сдвигу линии спроса вправо. Линия AD_1 займет положение линии AD_2. Цены повысятся до уровня P_3. Однако выпуск на уровне Y_1 сохранится. Таким образом, за счет инфляции сохранен уровень занятости и выпуска.

▷ **Пример 6.1.** Экономика находится в состоянии долгосрочного равновесия. Графиком функции совокупного предложения является прямая линия, описываемая уравнением $Y = 4000$. Совокупный спрос описывается функцией, полученной представителями классической кембриджской школы. Для рассматриваемого примера эта функция имеет вид:

$$Y = \frac{1000}{0,25 \cdot P},$$

где 1000 — количество денег в экономике.

Из-за неблагоприятного шока цены выросли на 25%.

Провести анализ и определить новое количество денег в экономике.

Р е ш е н и е. Точка макроэкономического равновесия определяется путем решения системы уравнений

$$\begin{cases} Y = 4000, \\ Y = \dfrac{1000}{0,25 \cdot P}. \end{cases}$$

Отсюда находим координаты макроэкономического равновесия $(4000; 1)$, т.е. равновесная координата $Y_1 = 4000$, а равновесная координата $P_1 = 1$.

При наступлении шока совокупная цена будет равна $P_2 = 1,25$.

Цена при этом скользит по совокупной линии спроса, а выпуск будет уменьшаться. Новое значение выпуска составит

$$Y_2 = \frac{1000}{0,25 \cdot 1,25} = 3200.$$

Этот шок приведет также к дополнительной безработице. Постепенно цены начнут снижаться, выпуск увеличиваться, безработица уменьшаться, и экономика вернется в исходное состояние.

Этих неприятных последствий шока можно избежать, если в ситуацию вмешается государство и проведет дополнительную эмиссию денег. Новое количество денег M можно найти из уравнения

$$Y = \frac{M}{0,25 \cdot P},$$

подставив туда значения первоначального выпуска $Y_1 = 4000$ и новую цену $P_2 = 1,25$. В результате получим

$$M = 4000 \cdot 0,25 \cdot 1,25 = 1250.$$

Макроэкономическое равновесие при различных условиях представлено на рис. 6.9.

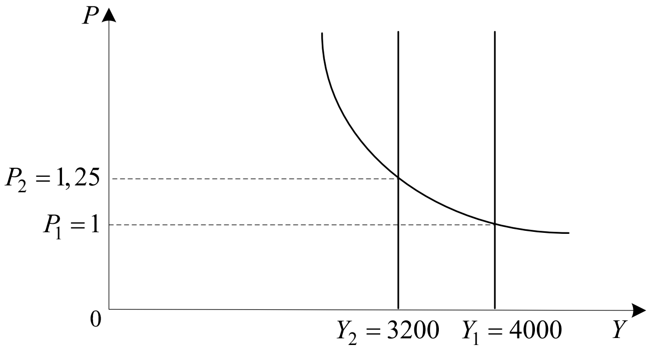


Рис. 6.9. **Методы сохранения макроэкономического равновесия при неблагоприятном шоке**

Таким образом, увеличив инфляцию, удалось избежать резкого скачка безработицы и снижения выпуска. ◀

6.6. Модель «кейнсианский крест»

Теория потребления по Кейнсу подробно рассмотрена в гл. 4. Зависимость потребительских расходов домашних хозяйств C от дохода при отсутствии налогов определяется соотношением

$$C = a + bY, \tag{6.1}$$

где a — автономное потребление, не зависящее от размеров располагаемого дохода и характеризующее минимальный уровень этого потребления, необходимый людям; b — предельная склонность к потреблению; Y — доход.

Запланированные расходы (E) — это сумма средств, которую домохозяйства, фирмы и правительство планируют истратить на товары и услуги. Они определяются соотношением:

$$E = C + I + G + X_n,$$

где I — инвестиции; G — государственные расходы; X_n — чистый экспорт (разность между экспортом и импортом).

Используя приведенную выше формулу для потребительских расходов, соотношение для запланированных расходов можно записать в виде:

$$E = a + bY + I + G + X_n = A + bY \ ,$$

где $A = a + I + G + X_n$ — сумма автономных запланированных расходов; Y — доход.

График зависимости запланированных расходов от дохода $E = A + bY$ представлен на рис. 6.10. Там же приведен график прямой линии $E = Y$. Этот рисунок называется крест Кейнса.

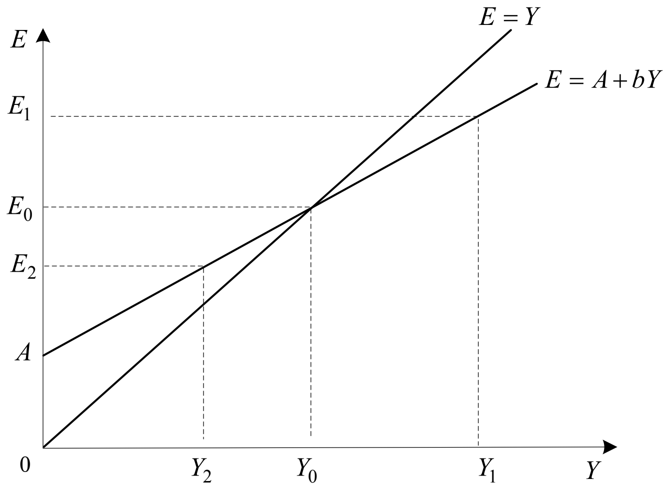


Рис. 6.10. **Крест Кейнса**

Равновесие наблюдается в точке (Y_0, E_0) пересечения прямых. В этой точке запланированные расходы E_0 равны доходам Y_0. Это позволяет записать основное макроэкономическое тождество в виде:

$$Y = C + I + G + X_n. \qquad \textbf{(6.2)}$$

▷ **Пример 6.2.** Сумма автономных запланированных расходов составляет 200 млрд руб., а предельная склонность к потреблению — 0,8.

Определить равновесные уровни дохода и потребления.

Р е ш е н и е. Для условий примера имеем функцию потребления

$$E = 200 + 0{,}8 \cdot Y.$$

Для определения равновесного уровня дохода надо решить систему уравнений

$$\begin{cases} E = 200 + 0,8 \cdot Y, \\ E = Y. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим равновесный уровень дохода:

$$Y_0 = \frac{200}{1 - 0,8} = 1000 \text{ млрд руб.}$$

Из второго уравнения системы уравнений следует, что равновесный уровень потребления равен:

$$E_0 = Y_0 = 1000 \text{ млрд руб.} ◄$$

Если доходы составляют Y_1 (см. рис. 6.10), то запланированные расходы превышают доходы на величину $Y_1 - E_1$. Эта разность является положительной величиной и может рассматриваться как сбережения. Для точки Y_2 разность $Y_2 - E_2$ является отрицательной величиной.

Равновесный выпуск может колебаться при изменении любого из совокупных расходов. При нарушении равновесия невидимые силы экономики возвращают ее в исходное состояние. Пусть фактический объем производства Y_1 превысил равновесный объем Y_0. В этом случае потребители будут покупать товаров меньше, чем произвела экономика. Нереализованная продукция принимает форму товарно-материальных запасов. Чем больше различие между фактическим и равновесным объемом производства, тем больше объем товарно-материальных запасов. Рост запасов приводит к снижению производства и, соответственно, к снижению выпуска. Постепенно этот выпуск снижается до равновесного.

Если же фактический объем производства Y_1 меньше равновесного объема Y_0, то потребители не смогут приобрести запланированное количество товаров. Это стимулирует увеличение выпуска. Постепенно этот выпуск повышается до равновесного.

6.7. Мультипликатор автономных расходов

Изменение суммы автономных запланированных расходов, определяемых величиной $A = a + I + G + X_n$, приводит к смещению линии запланированных расходов $E = A + bY$. Предполагается, что налоги отсутствуют. Увеличение любого из совокупных расходов сдвигает линию запланированных расходов вверх, а уменьшение — вниз. Однако любое изменение совокупных расходов приведет к большему изменению совокупного дохода. Связано это с эффектом мультипликатора автономных расходов.

Мультипликатор автономных расходов (*M*) — отношение изменения дохода (валового внутреннего продукта) от равновесного к изменению автономных расходов, вызвавшему это изменение дохода. Он определяется по формуле

$$M = \frac{\Delta Y}{\Delta A},$$

где ΔY — приращение выпуска; ΔA — приращение суммы автономных запланированных расходов, вызванное приращением одной или нескольких составляющих.

Величина M отлична от единицы, т.е. приращение автономных расходов не равно приращению выхода. Это связано с тем, что однократное изменение автономных расходов порождает многократное изменение выпуска. Формулу для определения мультипликатора можно представить в виде:

$$M = \frac{\Delta Y}{\Delta A} = \frac{1}{1-b},$$

где b — склонность к потреблению.

▷ **Пример 6.3.** Правительство увеличило заработную плату работников оборонного сектора на 5 млрд руб. Предельная склонность к потреблению в обществе составляет 0,8.

Определить увеличение внутреннего валового продукта.

Р е ш е н и е. Мультипликатор равен:

$$M = \frac{1}{1-b} = \frac{1}{1-0{,}8} = 5.$$

Валовой внутренний продукт увеличился на

$$\Delta Y = \Delta A \cdot M = 5 \cdot 5 = 25 \text{ млрд руб.}$$ ◀

Рассмотренный эффект мультипликатора используется многими правительствами для регулирования экономики. Например, во времена Великой депрессии в конце 1920-х и в начале 1930-х гг. правительство Ф. Рузвельта в США использовало рекомендации Кейнса для стабилизации экономики. Для этих целей в стране были организованы общественные работы, направленные на строительство плотин, дорог и т.п. за счет государственных расходов. Это позволило повысить доходы населения как за счет заработной платы на общественных работах, так и за счет мультипликатора. Инвестиции в указанные проекты позволяли повысить доходы населения без выпуска новых товаров. Это важно, так как рынок был перенасыщен товарно-материальными запасами, а спрос на них из-за отсутствия денег у населения был чрезвычайно низок.

Эффект мультипликатора приводит не только к положительным последствиям, как в рассмотренном примере выхода из депрессии, но и к экономической нестабильности из-за колебаний деловой активности, что будет показано в гл. 9. Для нейтрализации этого эффекта в задачи правительства входит задача уменьшения величины предельной склонности к потреблению, что снизит амплитуду этих колебаний.

Заметим, что эффект мультипликатора связан с созданием краткосрочного равновесия. Заметно проявляется этот эффект для совокупного предложения, определяемого кейнсианской частью графика на интервале от 0 до $Y_{\text{Кейнс}}$ (см. рис. 6.7). Надо отметить, что инвестиции связаны не только с объемом выпуска, но и с объемом занятости населения, т.е. влияют на безработицу. Первоначальные инвестиции увеличивают доходы и создают занятость в каком-либо секторе экономики. Это, в свою очередь, увеличивает выпуск и занятость в соседних секторах, которые выпускают потребительские товары.

В классической теории, представленной на графике рис. 6.7 вертикальной линией, равновесие характеризуется полной занятостью. Цены и заработная плата — величины нестабильные. При наступлении равновесия при уровне полной занятости планируемые инвестиционные расходы равны сбережениям. Экономика функционирует на уровне, соответствующем потенциальным возможностям. Потенциальный равновесный объем выпуска в этом случае обозначен знаком $Y_{\text{кл}}$. Отклонение выпуска от потенциального равновесного объема $Y_{\text{кл}}$ может быть как в сторону увеличения, так и в сторону уменьшения.

Отклонение выпуска от потенциального равновесного объема $Y_{\text{кл}}$ в сторону увеличения приводит к инфляционному разрыву, т.е. к повышению инфляции. Это можно объяснить, используя геометрию рис. 6.11.

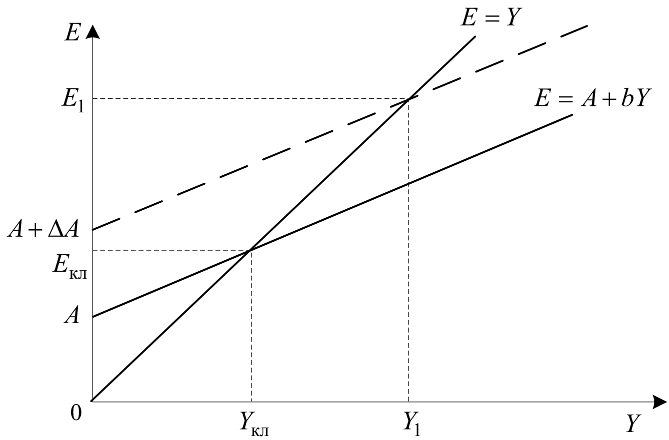


Рис. 6.11. **Инфляционный разрыв**

В условиях сбалансированности точка равновесия имеет координаты $(Y_{кл}, E_{кл})$. Пусть за счет приращения суммы автономных запланированных расходов линия расходов сместилась вверх. Это приращение ΔA называют инфляционным разрывом. У новой точки равновесия координаты должны быть равны (Y_1, E_1). За счет увеличения автономных расходов и эффекта мультипликатора спрос увеличился. Однако выпуск является потенциальным, т.е. в долгосрочном периоде не может увеличиться, так как все ресурсы задействованы. Все это в совокупности приводит к возрастанию цен, т.е. к росту инфляции. Постепенно выпуск уменьшается до равновесного объема $Y_{кл}$, т.е. экономические показатели смещаются в точку $(Y_{кл}, E_{кл})$.

Отклонение выпуска от $Y_{кл}$ в сторону уменьшения приводит к дефляционному (рецессионному) разрыву. Смысл дефляционного разрыва поясняется на рис. 6.12.

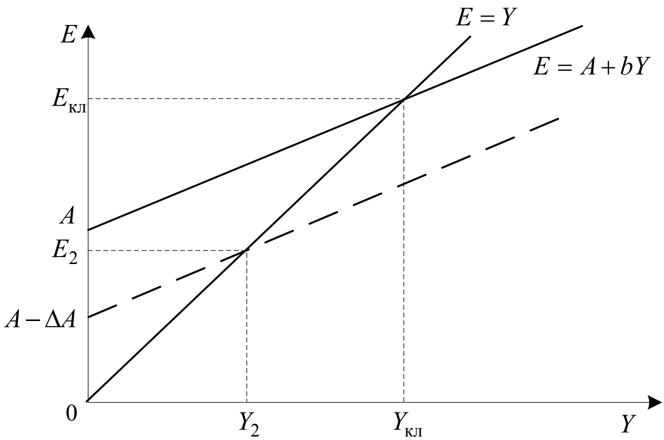


Рис. 6.12. **Дефляционный разрыв**

Так же как и прежде, точка равновесия имеет координаты $(Y_{\text{кл}}, E_{\text{кл}})$. Пусть за счет сокращения суммы автономных запланированных расходов линия расходов сместилась вниз на величину ΔA, называемую *дефляционным разрывом*. У новой точки равновесия координаты равны (Y_2, E_2). Уменьшение выпуска связано с увеличением безработицы. Спад производства и повышение безработицы увеличиваются за счет эффекта мультипликатора. Для преодоления дефляционного разрыва надо стимулировать совокупный спрос до перемещения равновесия в точку $(Y_{\text{кл}}, E_{\text{кл}})$.

▷ **Пример 6.4.** Сумма автономных запланированных расходов A_2 составляет 600 млрд руб., а предельная склонность к потреблению — 0,8. Потенциальный равновесный объем выпуска равен 3500 млрд руб.

Определить разрыв дохода и дефляционный разрыв.

Р е ш е н и е. Найдем равновесный уровень дохода из системы уравнений

$$\begin{cases} E = 600 + 0{,}8 \cdot Y, \\ E = Y. \end{cases}$$

Решение этой системы имеет вид:

$$Y_2 = \frac{600}{1 - 0{,}8} = 3000 \text{ млрд руб.}$$

Разрыв дохода равен

$$\Delta Y = Y_{\text{кл}} - Y_2 = 3500 - 3000 = 500 \text{ млрд руб.}$$

Из формулы $E = A + bY$ при известном потенциальном равновесном объеме $E = Y = Y_{\text{кл}} = 3500$ млрд руб. выпуска и предельной склонности к потреблению 0,8 находим

$$A = Y_{\text{кл}} - bY_{\text{кл}} = 3500 - 0,8 \cdot 3500 = 700 \text{ млрд руб.}$$

Дефляционный разрыв равен

$$\Delta A = A - A_2 = 700 - 600 = 100 \text{ млрд руб.}$$

Проверить решение можно, используя мультипликатор. Мультипликатор равен:

$$M = \frac{1}{1-b} = \frac{1}{1-0,8} = 5.$$

Разрыв дохода равен:

$$\Delta Y = \Delta A \cdot M = 100 \cdot 5 = 500 \text{ млрд руб.}$$

Результат совпадал с полученным выше. ◀

6.8. Парадокс бережливости

В соответствии с классической теорией процесс сбережений является благоприятным для развития экономики. Сбереженные средства, по мнению классиков, являются источниками инвестирования, а значит, способствуют развитию экономики. Однако эти утверждения не подходят к странам, добившимся высокой степени экономического развития. В этих странах стремление сберечь всегда опережает стремление инвестировать. Оказалось, что такая позиция может привести к кризисным явлениям. В этом и состоит парадокс бережливости, который характерен для условий неполного использования основных факторов производства.

Из приведенных выше материалов следует, что изъятие части потребительских расходов из обращения приведет к снижению инвестиций. Это, в свою очередь, приведет к сокращению дохода, увеличению товарно-материальных запасов и сокращению производства. Сокращение дохода и производства тем сильнее, чем сильнее действует мультипликационный эффект.

Для долгосрочной модели совокупного предложения в ответ на постепенное уменьшение совокупного спроса изменение ВВП может быть незаметным. Также может происходить незначительное снижение совокупной цены, которое на фоне естественной инфляции можно не заметить. При наличии незначительных скачков совокупного спроса возможно краткосрочное уменьшение выпуска, т.е. график функции совокупного предложения для долгосрочного периода переместится влево. Это приведет к незначительному увеличению товарно-материальных запасов, которые будут уменьшаться по мере увеличения дохода потребителей. Постепенно график функции совокупного предложения для долгосрочного периода сместится на прежнее место.

Пояснить парадокс бережливости также можно, используя модель макроэкономического равновесия *AD—AS*. Рассмотрим график на рис. 6.13.

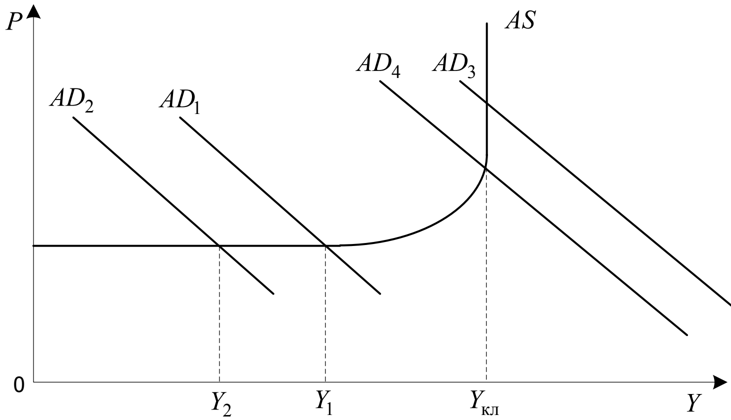


Рис. 6.13. **Макроэкономическое равновесие в модели *AD—AS***

1. Первый случай, который рассматривается здесь, показывает линию совокупного спроса AD_1, которая пересекает линию совокупного предложения в области кейнсианской модели. Линия совокупного предложения в этом случае является параллельной оси $0Y$. Если за счет сбережений спрос уменьшится и линия AD_1 переместится в положение AD_2, то при неизменной цене выпуск уменьшится с Y_1 до Y_2. Бережливость привела к падению выпуска. Напомним, что модель Кейнса справедлива для краткосрочного периода.

2. Во втором случае линия совокупного спроса AD_3 пересекает линию совокупного предложения на участке долгосрочной части модели. Линия совокупного предложения в этом случае является перпендикулярной прямой оси $0Y$. Если за счет сбережений спрос уменьшится и линия AD_3 переместится в положение AD_4, то выпуск останется равным $Y_{\text{кл}}$, а совокупная цена уменьшится.

▷ **Пример 6.5.** Сумма автономных запланированных расходов составляет 200 млрд руб., а предельная склонность к потреблению — 0,8 и 0,75.

Определить равновесные уровни дохода и потребления.

Р е ш е н и е. Для предельной склонности к потреблению, равной 0,8, равновесные уровни дохода и потребления были определены в примере 6.2. Эти величины равны

$$Y_0 = E_0 = 1000 \text{ млрд руб.}$$

Для предельной склонности к потреблению, равной 0,75, система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} E = 200 + 0,75 \cdot Y, \\ E = Y. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим равновесный уровень дохода и потребления:

$$Y_0 = E_0 = \frac{200}{1-0,75} = 800 \text{ млрд руб.}$$

Таким образом, снижение предельной склонности к потреблению от 0,8 до 0,75 привело к снижению дохода на 200 млрд руб. ◀

Упражнения

Задача 6.1. Экономика находится в состоянии равновесия. Графиком функции совокупного предложения является прямая линия, описываемая уравнением $P = 0,8 \cdot Y$. Совокупный спрос описывается функцией, полученной представителями классической кембриджской школы. Для рассматриваемого случая эта функция имеет вид $Y = \dfrac{1000}{0,25 \cdot P}$, где 1000 — количество денег в экономике. Из-за неблагоприятного шока выпуск сократился на 25%.

Провести анализ и определить новую массу денег, необходимую для нейтрализации последствий шока.

Задача 6.2. Сумма автономных запланированных расходов составляет 200 млрд руб., а предельная склонность к потреблению — 0,8.

Определить сбережения при уровне дохода 800 млрд руб. и 1200 млрд руб.

Задача 6.3. Правительство увеличило заработную плату работников оборонного сектора на 5 млрд руб. Увеличение внутреннего валового продукта при этом составило 20 млрд руб.

Определить предельную склонность к потреблению.

Задача 6.4. Сумма автономных запланированных расходов A_0 составляет 600 млрд руб., а равновесный для этих расходов доход равен 2400 млрд руб. Потенциальный равновесный объем выпуска равен 3000 млрд руб.

Определить дефляционный разрыв.

Библиографический список

1. *Агапова Т.А.*, *Серегина С.Ф.* Макроэкономика. М.: ДиС, 1997.
2. *Вечканов Г.С.*, *Вечканова Г.Р.* Макроэкономика. М.: Питер, 2006.
3. *Киселева Е.А.* Макроэкономика. М.: Эксмо, 2007.
4. *Курс* экономической теории / Под ред. М.Н. Чепурина, Е.А. Киселевой. Киров: АСА, 1995.
5. *Тарасевич Л.С.*, *Гребенников П.И.*, *Леусский А.И.* Макроэкономика. М.: Высшее образование, 2007.
6. *Экономическая* теория / Под ред. В.И. Видяпина и др. М.: ИНФРА-М, 2000.

Глава 7

Макроэкономическое равновесие на денежном рынке

7.1. Сущность и функции денег

Деньги [1—5] — абсолютно ликвидное средство обмена. В отличие от имущества, деньги либо вовсе не приносят дохода при стабильном уровне цен, либо их доходность существенно ниже.

Важнейшим свойством денег является их высокая ликвидность. Известно, что высоколиквидное имущество можно быстро, легко и с минимальными издержками обменять на любые другие активы. Поскольку издержки обмена денег на какое-либо имущество равны нулю, то их считают абсолютно ликвидным средством обмена [3].

В современной экономике выделяют три основные функции денег: средство платежа, меру стоимости и средство накопления.

1. Средство платежа. На ранней стадии развития рыночных отношений в обществе в качестве средств платежа выступали наиболее распространенные среди населения товары (например, овцы или другой домашний скот). На более поздних этапах средствами платежа служили драгоценные металлы, такие как серебро и золото. В настоящее время деньги-товары заменены на бумажные и иные деньги, а также в качестве средств платежа широкое распространение получили электронные деньги.

Переход от бартера к купле-продаже существенно облегчил товарообмен. Надо сказать, что в России в 1990-х гг. рубль во многом утратил функцию средства платежа из-за высокого темпа прироста инфляции. Бартерные операции приобрели в это время широкий размах. Например, в счет своих долгов энергетикам одна организация поставляла продукцию другой, выполняющей работы для поставщика электроэнергии, который погашал эти долги, и т.д. [5]. Платежи сегодня осуществляют тремя способами:

1) используя передачу денежных знаков (например, бумажных денег), при этом платежи проводятся наличными деньгами;

2) посредством коммерческих банков, при этом используются текущие счета, чеки, электронные карты;

3) используя долговые документы, в которых удостоверяется задолженность одного лица другому. К долговым документам относятся долговые обязательства и векселя.

2. Мера стоимости. Прежде чем выполнять функцию средства платежа за данный товар, следует определить его цену, т.е. задействовать функцию денег как меру стоимости. Из сказанного следует, что мерой стоимости являются деньги. В России единицей меры стоимости является рубль. Но в нашей истории рубль не всегда являлся одновременно мерой стоимости и средством платежа. В начале 1990-х гг. средством платежа служил рубль, а мерой стоимости — доллар США. Это привело к тому, что цены на товары указывались в условных единицах, под которыми все понимали доллар США.

При моделировании рынка денег могут использоваться относительные цены товаров и услуг. Для этих целей берутся отношения цен каждого из товаров к цене какого-либо одного из них. Таким образом, количество относительных цен будет на одно меньше, чем количество товаров.

3. Средство накопления. Полученные от продажи товара или услуги деньги можно потратить не сразу после операции, а спустя какое-то время. Свойство денег сохранять свою ценность во времени является основой их функции накопления. Надо сказать, что этим свойством обладают не только деньги, но и другие активы, например, акции, облигации, недвижимость и т.д. Однако деньги отличаются от всех активов абсолютной ликвидностью. Все остальные активы этим свойством не обладают. Например, даже имея ликвидные акции, бизнесмену потребуются некоторое время и дополнительные издержки для их продажи и получения денег, которые он хочет использовать для проведения той или иной операции. Заметим, что функцию средства накопления деньги выполняют только при наличии стабильных цен. Инфляция может заметно снизить качество денег как средства накопления.

7.2. Денежная масса

Денежная масса представляет собой совокупность наличных денег и денег безналичного оборота. Количество денег в стране регулируется Центральным банком. Центральный банк — это орган государственного регулирования экономики, наделенный монопольным правом выпуска банкнот, регулирования денежного обращения, кредита и валютного курса, хранения официальных золотовалютных резервов.

Для регулирования эмиссии используются расчеты кассовых оборотов, или кассовый баланс, основной целью которого является определение потребности в наличных деньгах в целом по стране, по регионам и учреждениям банков.

В Центральном банке существует свой резервный фонд банкнот и монет, т.е. запасов банкнот и монет, не выпущенных в обращение и хранящихся в ЦБ для нужд регулирования. Центральный банк за счет этих резервов обновляет наличную массу в обращении, поддерживает необходимый купюрный состав.

Существуют разные подходы к определению необходимой в обращении денежной массы. Но все эти подходы используют денежные агрегаты.

Денежный агрегат — это группировка банковских счетов по степени быстроты превращения средств на этих счетах в наличные деньги. Чем быстрее средства на этих счетах можно перевести в наличную форму, тем ликвиднее считается данный агрегат.

Несмотря на аналогичные обозначения денежных агрегатов во всех странах, их наполнение различно. Классическим вариантом расчета денежной массы по денежным агрегатам считается классификация, принятая Федеральной резервной системой США. Денежные агрегаты, используемые в России, по обозначениям сходны с американскими агрегатами, а по смыслу несколько отличаются от них.

В Российской Федерации используются денежные агрегаты, принятые в мировой практике: $M0$, $M1$, $M2$, $M3$. Специфика этих показателей в России по сравнении с американскими показана в табл. 7.1.

Таблица 7.1

США	*Российская Федерация*
$M0$ = наличные деньги у населения + остатки наличных денег в кассах юридических лиц	
$M1$ = $M0$ + вклады до востребования + другие чековые вклады	$M1$ = $M0$ + расчетные счета, текущие счета бюджета, счета общественных организаций, чековые счета и аккредитивы, а также депозиты до востребования
$M2$ = $M1$ + мелкие срочные вклады (до 100 тыс. долл.) + сберегательные счета + однодневные соглашения об обратном выкупе + паи во взаимных фондах денежного рынка	$M2$ = $M1$ + срочные вклады населения в коммерческих банках + срочные вклады юридических лиц в коммерческих банках
$M3$ = $M2$ + крупные срочные вклады + долгосрочные соглашения о покупке ценных бумаг с обратным выкупом	$M3$ = $M2$ + сертификаты коммерческих банков + облигации государственных займов
L = $M3$ + коммерческие ценные бумаги + казначейские векселя, сберегательные государственные облигации, векселя коммерческих банков	—

Коэффициент наличности показывает соотношение наличных и безналичных денег и вычисляется по формуле:

$$K_1 = \frac{M0}{M2}.$$

▷ **Пример 7.1.** На 1 января 2004 г. в России денежный агрегат $M0$ = 1147,0 млрд руб. Коэффициент наличности был равен 35,7%.

Определить денежный агрегат $M2$.

Р е ш е н и е. $M2 = \dfrac{M0}{K_1} = \dfrac{1147,0}{0,357} = 3212,8$ млрд руб. ◀

Коэффициент монетизации определяет наличие денежной массы по отношению к валовому внутреннему продукту и вычисляется по формуле:

$$K_2 = \frac{M2}{ВВП}.$$

График коэффициента монетизации в различные годы в России, построенный по данным [3], приведен на рис. 7.1.

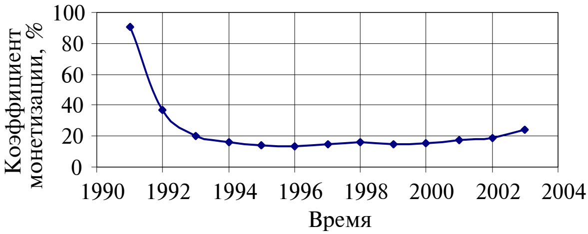


Рис. 7.1. **Коэффициент монетизации в Российской Федерации**

Минимальное значение коэффициента монетизации за указанный период составило 13,4% в 1996 г. В 2003 г. коэффициент монетизации был равен 24%. Низкие значения этого коэффициента в середине 1990-х гг. объясняются высокой долей бартера при взаиморасчетах между предприятиями. В развитых капиталистических странах коэффициент монетизации лежит в диапазоне 60—100%. В некоторых странах этот коэффициент может быть более 100%.

Коэффициент монетизации повышается при повышении спроса на деньги и при снижении инфляции.

7.3. Модель инфляции

На денежном рынке процентная ставка характеризует упущенный доход, связанный с хранением денег в денежной форме. Ясно, что величина процентной ставки связана с темпом прироста инфляции.

Различают номинальную и реальную стоимость денег. За счет инфляции стоимость денег в исследуемом периоде относительно базисного периода времени изменяется. Это приводит к необходимости сравнивать цену денег в разные периоды времени. Делается это при помощи сложных процентных ставок наращения, которые называются *номинальной процентной ставкой* (брутто-ставкой) и *реальной процентной ставкой*. При этом используются следующие основные положения.

Реальная стоимость для базисного периода C суммы в исследуемом периоде S, обесцененной за заданный период времени за счет инфляции, рассчитывается по формуле:

$$C = S/I_p,$$

где I_p — индекс цен, показывающий, во сколько раз в среднем изменились цены на заданную группу товаров и услуг за заданный период.

Заданным периодом времени будем называть период от базового периода до исследуемого.

Индекс цен может быть рассчитан, например, по формуле Пааше:

$$I_p = \sum_{j=1}^{T} p_{1j} q_{1j} \Bigg/ \sum_{j=1}^{T} p_{0j} q_{1j},$$

где p_{1j}, p_{0j} — цена j-го товара в исследуемом и базисном периодах соответственно; q_{1j} — количество проданных товаров j в исследуемом периоде; T - общее количество исследуемых товаров.

Темпом прироста инфляции называется относительный прирост цен за период:

$$H = I_p - 1.$$

Индекс цен за несколько периодов n, следующих друг за другом, вычисляется по формуле:

$$I_p = \prod_{t=1}^{n} I_{p,t} = \prod_{t=1}^{n} (1 + H_t),$$

где t — номер периода; $I_{p,t}$ — индекс цен в периоде под номером t; H_t — темп прироста инфляции в периоде под номером t.

Если ожидаемый темп инфляции величина постоянная в течение n периодов, то формула для индекса цен приобретает вид:

$$I_p = (1 + H_t)^n.$$

Средние за период индекс цен $\bar{I}_p$ и темп инфляции $\bar{H}$ находятся по формулам:

$$\bar{I}_p = \sqrt[n]{I_p}; \quad \bar{H} = \sqrt[n]{I_p} - 1 = \bar{I}_p - 1,$$

где n — количество периодов (лет).

▷ **Пример 7.2.** В первый год темп прироста инфляции равен 20%, а во второй — 10%.
Определить темп прироста инфляции за два года и среднегодовой темп прироста инфляции.
Р е ш е н и е. Индекс цен за два года равен:

$$I_p = \prod_{t=1}^{n} (1 + H_t) = \left(1 + 0,2\right) \cdot \left(1 + 0,1\right) = 1,32.$$

Находим темп прироста инфляции за два года:

$$H = I_p - 1 = 1{,}32 - 1 = 0{,}32, \text{ или } 32\%.$$

Среднегодовой темп прироста инфляции находим по формуле:
$\bar{H} = \sqrt[n]{I_p} - 1 = \sqrt{1{,}32} - 1 = 0{,}149$, или $14{,}9\%$. ◄

Для сложных процентов обесцененная инфляцией сумма определяется выражением:

$$C = P\frac{(1+r)^n}{I_p} = P\left(\frac{1+r}{1+\bar{H}}\right)^n,$$

где r — сложная годовая процентная ставка наращения; n — срок ссуды в годах.

Реальная стоимость денег уменьшилась в $I_p = (1+\bar{H})^n$ раз, т.е. произошла эрозия капитала. Напомним, что *эрозией капитала* называется обесценивание денег во времени за счет инфляции.

Для компенсации обесценивания денег ставку увеличивают на величину инфляционной премии, являющейся дополнительной доходностью, компенсирующей инфляционные потери. Итоговую ставку называют номинальной ставкой, или брутто-ставкой. Выразим величину брутто-ставки r через реальную процентную ставку a. Тогда ставку r в формуле для обесцененной инфляцией суммы и ставку a в формуле для сложных процентов $C = P\left(1+a\right)^n$ надо считать эквивалентными, т.е. их связь определяется уравнением

$$\frac{\left(1+r\right)^n}{I_p} = (1+a)^n.$$

Из этого соотношения следует, что

$$r = \left(1+a\right)\sqrt[n]{I_p} - 1\,; \quad a = \frac{1+r}{\sqrt[n]{I_p}} - 1\,.$$

Подставив сюда $I_p = (1+\bar{H})^n$, находим

$$\left(1+r\right)^n = \left[\left(1+a\right)\cdot\left(1+\bar{H}\right)\right]^n.$$

Отсюда получим связь между брутто-ставкой и реальной процентной ставкой:

$$r = a + \bar{H} + a\bar{H}; \quad a = \frac{1+r}{1+\bar{H}} - 1.$$

▷ **Пример 7.3.** Найти сложную номинальную процентную ставку при значении реальной процентной ставки, равном 6% годовых, и следующих годовых темпах прироста инфляции за три года: $H_1 = 11\%$; $H_2 = 9\%$; $H_3 = 8\%$.

Р е ш е н и е. Находим средний темп прироста инфляции за три года:

$$\sqrt[n]{I_p} = \sqrt[3]{(1+0,11)(1+0,09)(1+0,08)} = 1,3067.$$

Определяем номинальную процентную ставку по формуле:

$r = (1+a)\sqrt[n]{I_p} - 1 = (1+0,06)\cdot 1,09326 - 1 = 0,159$, или 15,9% годовых.

Таким образом, инвестор получит реальную доходность 6% годовых, если номинальная доходность будет равна 15,9% годовых. ◀

В экономиках различных стран часто встречаются ситуации, когда $a \ll 1$ и $\bar{H} \ll 1$. Знак существенно меньше часто используют, когда величина менее 0,1, а это значит, что реальная процентная ставка и среднегодовой темп прироста инфляции менее 10%. В этом случае получаем приближенную формулу для номинальной процентной ставки:

$$r \approx a + \bar{H}.$$

Это соотношение называют *уравнением Фишера* [2].

7.4. Теории спроса на деньги

Сегодня известно несколько теорий спроса на деньги, которыми экономисты пользуются в практической деятельности.

Спрос на деньги определяется желанием экономических субъектов иметь в своем распоряжении реальные денежные запасы, или кассу, а также общей потребностью рынка в денежных средствах. Держание кассы лишает ее собственников доходов, которые могли бы принести ему активы, в которые он вложил бы свои денежные запасы. Теории спроса на деньги пытаются ответить на вопрос о причинах держания кассы и о величине спроса.

7.4.1. Классическая теория спроса на деньги

Как отмечалось выше, в классическую теорию спроса на деньги значительный вклад внесли экономисты Кембриджского университета. Широко известна формула классической кембриджской школы:

$$M = kYP,$$

где M — количество денег в экономике; k — коэффициент пропорциональности, являющийся временны́м интервалом, в течение которого происходит полный оборот всех находящихся в экономике денег; Y — объем выпуска в натуральном исчислении; P — уровень цен.

Для уяснения смысла показателей, входящих в эту формулу, рассмотрим их размерности. Объем выпуска в натуральном исчислении Y показывает, чему равен произведенный в течение года выпуск. Поэтому размерность этого показателя — $\frac{выпуск}{год}$. Уровень цен является ценой всего годового выпуска, поэтому имеет размерность $\frac{руб.}{выпуск}$. Произведение $Y \cdot P$ является валовым внутренним продуктом, имеющим размерность $\frac{руб.}{год}$. Количество денег в экономике M измеряется в рублях, т.е. имеет размерность *руб*. Коэффициент пропорциональности k имеет размерность *год*. Он показывает промежуток времени, в течение которого происходит полный оборот всех находящихся в экономике денег.

Формулу классической кембриджской школы часто записывают в виде уравнения обмена Фишера [3]:

$$MV = YP,$$

где $V = \frac{1}{k}$ — частота, показывающая количество полных оборотов всех находящихся в экономике денег в году.

Эта частота имеет размерность $\frac{1}{год}$. В научной литературе эту величину часто называют *скоростью обращения денег.*

Скорость обращения денег во времени изменяется медленно. Поэтому изменение номинальной массы денег, как следует из формулы Фишера, будет связано либо с изменением выпуска Y, либо с изменением цены P. Годовой выпуск национальной экономики, как правило, изменяется на несколько процентов в год. На ту же сумму при неизменной цене должно изменяться количество денег в экономике M. Если количество денег в экономике изменится сильнее, например, в 2 раза, то это в соответствии с уравнением Фишера приведет при неизменном выпуске к увеличению цены в 2 раза, т.е. будет иметь место инфляция. Справедливо и обратное утверждение, т.е. изменение цены приведет к необходимости изменения количества денег в экономике.

Таким образом, количество денег в обращении влияет только на уровень цен и на то, что скорость обращения денег и объем произведенных товаров и услуг стремятся к естественному уровню, присущему каждому из них, т.е. являются постоянными.

В классической теории под спросом на деньги понимается только транзакционный спрос, который определяется потребностью в наличности для совершения текущих сделок, например, покупки товаров, оплаты за жилищно-коммунальные услуги и т.п. Величина этого спроса зависит от объема номинального ВВП.

Владение абсолютно ликвидным активом, которым являются деньги, связано с альтернативными издержками, так как при этом не используется возможность получения дохода по ценным бумагам и срочным депозитам.

Повышение уровня цен, т.е. инфляция, по-разному влияет на доходность различных активов. Все это приводит к снижению спроса на реальные денежные запасы. Рассмотрим это на конкретном примере.

▷ **Пример 7.4.** Экономический субъект держит кассу 10 000 руб., облигации с номинальным гарантированным годовым доходом 10% на сумму 10 000 руб., а также акции на сумму 10 000 руб. с доходностью 15% годовых. Эти активы приобретены в начале года.

Определить реальную стоимость активов на конец года при годовом темпе прироста инфляции равном нулю и при 8%, а также потери из-за инфляции в абсолютных и относительных единицах.

Р е ш е н и е. Результаты расчета сведены в табл. 7.2.

Таблица 7.2

Тип актива	*На начало года, руб.*	*На конец года по ценам на начало года, руб.*		*Потери из-за инфляции при темпе ее прироста 8%*	
		годовой темп прироста инфляции равен нулю	*годовой темп прироста инфляции равен 8%*	*абсолютные, руб*	*относительные, %*
Касса	10 000	10 000	9259,26	740,74	7,4
Облигации	10 000	11 000	10 185,19	814,81	7,4
Акции	10 000	11 500	11 500	0	0

При отсутствии инфляции касса на конец года останется той же, т.е. будет равна 10 000 руб. Стоимость облигаций будет равна $10\,000 \cdot (1+0{,}1) = 11\,000$ руб., а стоимость акций — $10\,000 \cdot (1+0{,}15) = 11\,500$ руб. При годовом темпе прироста инфляции 8% стоимость кассы будет равна $\dfrac{10\,000}{1+0{,}08} = 9259{,}26$ руб., стоимость облигаций — $\dfrac{11\,000}{1+0{,}08} = 10\,185{,}19$ руб. На реальную стоимость акций инфляция при правильной организации работы не должна повлиять, поэтому эта стоимость останется равной 11 500 руб. Это связано с тем, что рост цен одинаково увеличит производственные издержки и выручку. ◄

Экономический субъект данного примера, прежде чем принять решение о сумме денег в кассе и о сумме, вложенной в облигации и акции, проведет анализ этих финансовых операций. Как видно из примера, абсолютные и относительные потери зависят от темпа прироста инфляции. Экономический субъект, прогнозируя этот темп на заданный им самим отрезок времени, определяет потери кассы. Потери зависят как от суммы кассы, так и от темпа прироста инфляции и длительности временно́го отрезка. Принимая решение о покупке облигаций с гарантированным годовым доходом, экономический субъект, имея прогноз годового темпа прироста инфляции, определяет реальную доходность этой операции, используя формулу Фишера. Формула для определения доходности имеет вид:

$$a = r - H,$$

где a — реальная доходность операции; r — номинальная доходность операции; H — годовой темп прироста инфляции.

Для рассматриваемого примера реальная доходность облигаций равна $a = 10 - 8 = 2\%$ *годовых.* Обычно риск снижения доходности облигаций невелик. Государственные краткосрочные облигации считаются безрисковыми, т.е. снижениями ожидаемой реальной доходности пренебрегают. Если риск потери доходности актива заметен, то ожидаемая доходность таких активов увеличивается на премию за риск. К таким активам относятся акции. Рынок акций, или фондовый рынок, является неустойчивым. Цена акций подвержена существенным колебаниям, зависящим от множества факторов, связанных с внутренними факторами эмитента и с состоянием внешней среды. Поэтому доходность акций является случайной величиной. При принятии решения о покупке акций экономический субъект помимо номинальной годовой доходности, ожидаемое значение которой равно 15% годовых, должен учесть риск снижения этой доходности по прошествии намеченного отрезка времени.

Функцию спроса на деньги принято обозначать буквой с индексом ^{D} справа сверху у этой буквы, например M^D (от *англ.* demand). Таким образом, спрос в классической теории спроса на номинальные деньги описывается соотношением

$$M^D = kYP.$$

Функцию спроса на реальные кассовые остатки записывают в виде:

$$\left(\frac{M}{P}\right)^D = kY.$$

В отличие от номинального количества денег в экономике M, которое имеет размерность *руб.*, реальные кассовые остатки выражаются в количестве реального блага. Реальные кассовые остатки имеют размерность $\dfrac{M\left[\text{руб.}\right]}{P\left[\text{руб.}/\text{выпуск}\right]} = \dfrac{M}{P}\left[\text{выпуск}\right]$. Таким образом, реальные кассовые остатки выражаются в единицах макроэкономического блага.

7.4.2. Модель оптимального управления наличностью Баумоля—Тобина

Пусть доход домашнего хозяйства хранится в коммерческом банке. По своему вкладу домашнее хозяйства получает проценты, начисляемые по простой номинальной ставке наращения r годовых. Домашнее хозяйство снимает со своего счета Y руб. для приобретения благ с интервалами между посещениями банка T дней. За это время все снятые деньги равномерно тратятся так, как показано на рис. 7.2. Произведение $kT = \theta$ является длительностью периода, в течение которого домашнее хозяйство пользуется этой моделью. Здесь θ — длительность периода в днях.

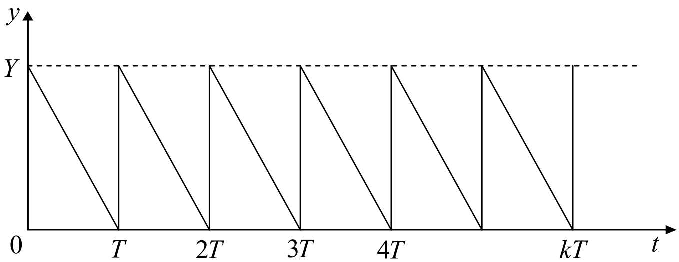


Рис. 7.2. **Модель оптимального управления наличностью Баумоля—Тобина**

Снимая в банке необходимые ему суммы, домашнее хозяйство терпит два типа издержек. Первый тип издержек связан с посещением банка. Обозначим затраты на одно посещение, не зависящие от суммы снятых денег, через c. Тогда затраты на k посещений за общий интервал времени работы будут определяться соотношением

$$C = kc = c\frac{X}{Y},$$

где X — общий спрос домашнего хозяйства на деньги за общий интервал времени θ.

Второй тип издержек связан с потерей процентных денег, которые домашнее хозяйство не получает у банка за период времени θ. Сняв в момент $t = 0$ сумму, равную Y, домашнее хозяйство не получит на эту сумму проценты. Причем проценты в периоде от нуля до $t = T$ будут изменяться от величины $r \cdot Y \cdot \frac{\Delta t}{K}$ до нуля, так как сумма средств, которыми располагает домашнее хозяйство, изменяется от Y до нуля. Здесь K — временна́я база, или число дней в году, а Δt — малый временно́й интервал, начинающийся в момент $t=0$. В этом параграфе все временны́е интервалы измеряются в днях. Проценты, которые домашнее хозяйство потеряет за временной промежуток $0 \div T$, вычисляются по формуле

$$\upsilon = \int_0^{T/K} r \cdot y(t) \cdot dt = \frac{r \cdot Y \cdot T}{2 \cdot K}.$$

Проценты, которые теряет домашнее хозяйство за интервал $0 \div k \cdot T$, равны $V = k \cdot \dfrac{r \cdot Y \cdot T}{2 \cdot K} = \dfrac{r \cdot \theta}{2 \cdot K} \cdot Y$.

Общие издержки W определяются суммой двух типов рассмотренных издержек:

$$W = C + V = \frac{c \cdot X}{Y} + \frac{r \cdot \theta}{2 \cdot K} \cdot Y.$$

График зависимости суммарных издержек W от суммы Y представлен на рис. 7.3.

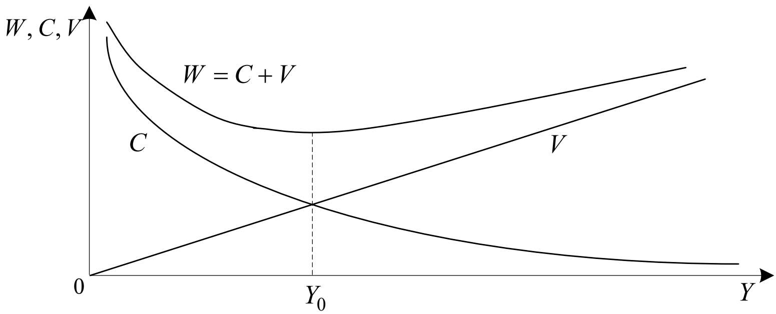


Рис. 7.3. **Зависимость суммарных издержек**

Из графика суммарных издержек $W = C + V$ видно, что исследуемая функция имеет минимум при сумме, полученной при одном посещении банка, равной Y_0. Для определения оптимального размера суммы, полученной при одном посещении банка, надо составить уравнение $\dfrac{dW}{dY} = 0$. Таким образом, из соотношения

$$\frac{dW}{dY} = -\frac{c \cdot X}{Y^2} + \frac{r \cdot \theta}{2 \cdot K} = 0$$

находим

$$Y_0^2 = \frac{2 \cdot K \cdot c \cdot X}{r \cdot \theta}.$$

Если ввести обозначение $b = \frac{X}{\theta} = \frac{Y}{T}$, которое является скоростью, или интенсивностью, расходования средств, то можно записать:

$$Y_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot K \cdot c \cdot b}{r}}.$$

Средний оптимальный объем спроса домашнего хозяйства для сделок вычисляется по формуле

$$\overline{Y}_0 = \frac{Y_0}{2} = \sqrt{\frac{K \cdot c \cdot b}{2 \cdot r}}.$$

Используя формулу для оптимального значения Y_0 и полученные выше выражения, можно найти другие оптимальные параметры. Из формулы $b = \frac{Y}{T}$ находим $T = \frac{Y}{b}$. Таким образом, для расчета оптимального интервала времени между поставками можно использовать выражение

$$T_0 = \frac{Y_0}{b} = \sqrt{\frac{2 \cdot K \cdot c}{r \cdot b}}.$$

Из формулы для двух типов суммарных издержек следует, что средние издержки в единицу времени составляют:

$$\overline{W} = \frac{W}{\theta} = \frac{c \cdot X}{Y \cdot \theta} + \frac{r}{2 \cdot K} \cdot Y = \frac{c \cdot b}{Y} + \frac{r}{2 \cdot K} \cdot Y.$$

Тогда оптимальные средние издержки в единицу времени определяются по формуле

$$\overline{W}_0 = \frac{c \cdot b}{\sqrt{\frac{2 \cdot K \cdot c \cdot b}{r}}} + \frac{r}{2 \cdot K} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot K \cdot c \cdot b}{r}} = \sqrt{\frac{r \cdot c \cdot b}{2 \cdot K}} + \sqrt{\frac{r \cdot c \cdot b}{2 \cdot K}} = \sqrt{\frac{2 \cdot r \cdot c \cdot b}{K}}.$$

▷ **Пример 7.5.** Домашнее хозяйство в течение года непрерывно и равномерно тратит 730 000 руб. Деньги снимаются со счета банка одинаковыми суммами. Затраты на одно посещение банка составляют 50 руб. По вкладу домашнее хозяйство получает проценты, начисляемые по простой номинальной ставке наращения 10% годовых.

Определить оптимальную сумму, получаемую при одном посещении банка, а также оптимальный интервал времени между посещениями, оптимальные средние издержки в единицу времени. Как изменятся эти характеристики при округлении оптимального интервала времени между поставками до целого? Найти характеристики кассы при увеличении интервала времени между поставками в 2 раза.

Р е ш е н и е. Интенсивность расходования кассы

$$b = \frac{X}{\theta} = \frac{730\,000}{365} = 2000 \text{ руб./сутки},$$

так как в году 365 дней.

Находим оптимальную сумму, получаемую при одном посещении банка:

$$Y_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot K \cdot c \cdot b}{r}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 365 \cdot 50 \cdot 2000}{0{,}1}} = 27\,018{,}51 \text{ руб.}$$

Для определения оптимального интервала времени между посещениями банка используется формула

$$T_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot K \cdot c}{r \cdot b}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 365 \cdot 50}{0{,}1 \cdot 2000}} = 13{,}51 \text{ дней.}$$

Оптимальные средние издержки в единицу времени определяются по формуле

$$\bar{W}_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot r \cdot c \cdot b}{K}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}1 \cdot 50 \cdot 2000}{365}} = 7{,}4 \text{ руб./сутки.}$$

При округлении оптимального интервала времени между посещениями банка до 14 дней сумма, получаемая при одном посещении банка, будет равна:

$$Y = b \cdot T = 2000 \cdot 14 = 28\,000 \text{ руб.}$$

Средние издержки на посещение банка и процентные потери в единицу времени определим по формуле

$$\bar{W} = \frac{c \cdot b}{Y} + \frac{r}{2 \cdot K} \cdot Y = \frac{50 \cdot 2000}{28\,000} + \frac{0{,}1}{2 \cdot 365} \cdot 28\,000 = 7{,}41 \text{ руб.}$$

Издержки после округления практически не отличаются от оптимальных.

При увеличении интервала времени между посещениями банка до 14 · 2 = 28 дней сумма, получаемая при одном посещении банка, будет равна:

$$Y = bT = 2000 \cdot 28 = 56\,000 \text{ руб.}$$

Средние издержки в единицу времени будут равны:

$$\overline{W} = \frac{c \cdot b}{Y} + \frac{r}{2 \cdot K} \cdot Y = \frac{50 \cdot 2000}{56\,000} + \frac{0,1}{2 \cdot 365} \cdot 56\,000 = 9,46 \text{ руб.}$$

В этом случае средние издержки в единицу времени увеличились на $\frac{9,46 - 7,4}{7,4} \cdot 100\% = 27,8\%$. ◄

7.4.3. Кейнсианская теория спроса на деньги

Дж.М. Кейнс предложил т р и мотива спроса на деньги:

1) транзакционный;
2) предосторожности;
3) спекулятивный.

Транзакционный мотив предусматривает потребность в наличности для совершения текущих сделок. Транзакционный спрос на деньги зависит только от уровня дохода и не зависит от процентной ставки. Чем выше уровень дохода, тем выше спрос на деньги. Этот вывод следует из рассмотренной в § 6.4 краткосрочной модели совокупного предложения, предложенной Кейнсом. Модель Кейнса основана на положениях о том, что в экономике имеет место неполная занятость и цены на товары и заработная плата не изменяются во времени. Это связано с тем, что экономика находится в состоянии депрессии. Поэтому мощности загружены не полностью, много свободной рабочей силы (безработица). Такая экономика в ответ на увеличение совокупного спроса за счет привлечения свободных ресурсов увеличивает реальный ВВП без повышения уровня цен. Это происходит потому, что вовлечение в производство незанятой рабочей силы не будет сопровождаться требованиями о повышении заработной платы. Инвесторы в таких условиях также не будут требовать повышения доходности (повышенных процентных ставок, или платы за капитал).

Из сказанного следует, что функция спроса в системе координат $r0L$, где r — процентная ставка, L — функция спроса, имеет вид

$$L = \text{const}.$$

График этой функции представлен на рис. 7.4.

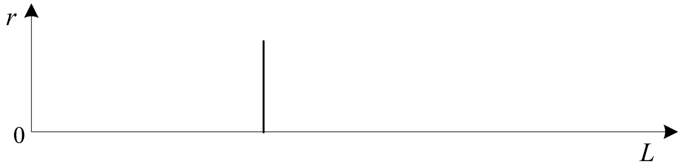


Рис. 7.4. **Транзакционный спрос на деньги**

Мотив предосторожности стимулирует хранение суммы денег на случай непредвиденных обстоятельств в будущем. Это могут быть, например, болезнь, несчастный случай, повышение цен на рынке и т.д. Спрос на деньги по мотиву предосторожности так же, как и по транзакционному мотиву, зависит от дохода. Помимо этого спрос на деньги по мотиву предосторожности зависит от величины упущенной выгоды, так как, не вкладывая деньги в покупку активов, приносящих доход, экономический субъект теряет возможность получить проценты.

Транзакционный мотив и мотив предосторожности определяются функцией денег как средства обмена.

Спекулятивный мотив стимулирует экономических субъектов, которые имеют свои представления о будущем состоянии рынка, приберегать некоторый резерв, чтобы с выгодой для себя воспользоваться им при наступлении ожидаемых ими условий. Спекулятивный мотив основан на функции денег как средства сохранения ценности. Экономический субъект, стимулируемый спекулятивным мотивом, принимает решение о том, в каких финансовых активах лучше всего хранить свои деньги. Кейнс рассматривал два актива: деньги и государственные облигации. В общем случае экономический субъект рассматривает и другие активы, например, акции, депозиты, сертификаты, векселя и т.д.

Облигация — срочная ценная долговая бумага, удостоверяющая отношение займа между ее владельцем (кредитором) и эмитентом (заемщиком). К основным характеристикам облигаций относятся: номинальная цена (номинал), выкупная цена или правило ее определения, если она отличается от номинала, дата погашения, купонная процентная ставка, дата выплат по купонам.

Государственные ценные бумаги являются финансовыми инструментами, обслуживающими государственный внутренний долг и представляющими собой облигации и векселя Министерства финансов РФ. Рынок государственных ценных бумаг является исключительно важным элементом экономической структуры страны с рыночной экономикой. Для государства он является механизмом привлечения инвестиционных ресурсов, а для инвесторов — выгодным направлением вложения денежных средств.

Эмитентом на рынке государственных ценных бумаг выступает государство в лице Министерства финансов РФ. Первичное размещение и погашение ценных бумаг осуществляется Центральным банком РФ по поручению Министерства финансов РФ.

Инвестором на рынке государственных ценных бумаг может быть любое юридическое или физическое лицо, резиденты и нерезиденты.

Контролирующим органом на рынке государственных ценных бумаг является Центральный банк РФ.

Существенную долю в структуре внутреннего государственного долга занимают государственные краткосрочные облигации (ГКО) и облигации федерального займа (ОФЗ), которые используются для покрытия дефицита федерального бюджета.

Государственные краткосрочные бескупонные облигации выпускаются в обращение как именные государственные ценные бумаги. Размещение ГКО происходит с дисконтом, а погашение осуществляется в безналичной форме по номинальной стоимости.

Рыночная цена облигации чаще всего отличается от номинальной и характеризуется ее курсом. Под *курсом* понимается отношение рыночной цены к номиналу, выраженное в процентах. Таким образом, курс K рассчитывается по формуле

$$K = \frac{B}{N},$$

где B — рыночная цена облигации; N — номинал облигации.

Расчет цены проводится с целью определения продажной цены облигации и выявления неверно оцененных рынком облигаций. При этом чаще всего используется метод дисконтированных доходов, состоящих из периодически получаемых по купонам процентов и номинала, выплачиваемого в конце срока. Например, если проценты выплачиваются p раз в году в конце периода в течение n лет, процентная ставка дисконтирования равна r годовых, а номинал — N, то цена облигации равна современной стоимости всех платежей p-срочной ренты и номинала:

$$A = R\frac{1-(1+r)^{-n}}{p\left[(1+r)^{1/p}-1\right]} + \frac{N}{(1+r)^{n}},$$

где R — годовая выплата процентов; $C = R/p$ — разовая выплата процентов.

Если купонная годовая ставка по облигации составляет u процентов от номинала, то последнюю формулу можно записать в виде:

$$k = \frac{A}{N} = u\frac{1-(1+r)^{-n}}{p\left[(1+r)^{1/p}-1\right]} + \frac{1}{(1+r)^n},$$

где k — расчетный курс облигации; $u = R/N$.

Если расчетный курс совпадает с рыночным, то $k = K$ и $A = B$.

Заметим, что ставка дисконтирования r является номинальной доходностью рассматриваемой финансовой операции в том случае, если проценты по облигации выплачиваются раз в году или если облигация является бескупонной.

▷ **Пример 7.6.** Облигация со сроком 7 лет, проценты по которой выплачиваются ежеквартально в размере 100 руб., имеет номинал 5000 руб.

Рассчитать ее курс и цену при процентной ставке 8%, 10% и 12% годовых.

Р е ш е н и е. Предварительно определяем купонную годовую ставку:

$$u = R/N = C \cdot p/N = 4 \cdot 100/5000 = 0{,}08 \text{ годовых.}$$

Первый вариант. Расчетный курс находится по формуле

$$k = 0{,}08\frac{1-1{,}08^{-7}}{4\left(1{,}08^{1/4}-1\right)} + \frac{1}{1{,}08^7} = 1{,}012294965, \quad \text{или} \quad \approx 101{,}23\%.$$

Цена облигации равна $A = 5000 \cdot 1{,}012294965 = 5061{,}47$ руб.

Второй вариант:

$$k = 0{,}08\frac{1-1{,}1^{-7}}{4\left(1{,}1^{1/4}-1\right)} + \frac{1}{1{,}1^7} = 0{,}91694674, \quad \text{или} \quad \approx 91{,}69\%.$$

Цена облигации равна $A = 5000 \cdot 0{,}91694674 = 4584{,}73$ руб.

Третий вариант:

$$k = 0{,}08\frac{1-1{,}12^{-7}}{4\left(1{,}12^{1/4}-1\right)} + \frac{1}{1{,}12^7} = 0{,}83349145, \quad \text{или} \quad \approx 83{,}35\%.$$

Цена облигации равна $A = 5000 \cdot 0{,}83349145 = 4167{,}46$ руб. ◄

Как видно из приведенных формул для цены облигации и из результатов расчета примера, цена облигации уменьшается с ростом процентной ставки.

Для бескупонных облигаций формула для ее цены упрощается и принимает вид:

$$A = \frac{N}{(1+r)^n}.$$

Если облигация погашается через один год от момента ее приобретения, то ее цена определяется по формуле

$$A = \frac{N}{1+r}.$$

Дисконт, или прибыль, который владелец облигации получит через год в момент погашения облигации, равен:

$$D = N - A = A \cdot (1+r) - A = A \cdot r.$$

Из формулы для цены бескупонной облигации можно найти номинальную доходность рассматриваемой финансовой операции:

$$r = \left(\frac{N}{A}\right)^{\frac{1}{n}} - 1.$$

При сроке один год номинальная доходность равна:

$$r = \frac{N}{A} - 1 = \frac{N - A}{A} = \frac{D}{A}.$$

Содержание экономическим субъектом кассы не приносит ему никакого дохода, хотя деньги в этом случае являются абсолютно ликвидными. Поэтому, выбирая одну из двух рассматриваемых альтернатив (держать кассу или купить облигации), экономический субъект ориентируется на доходность, которую приносят облигации. При повышении доходности, или процентной ставки, спрос на деньги понижается, и наоборот. Поэтому график для спекулятивного спроса на деньги имеет вид, показанный на рис. 7.5.

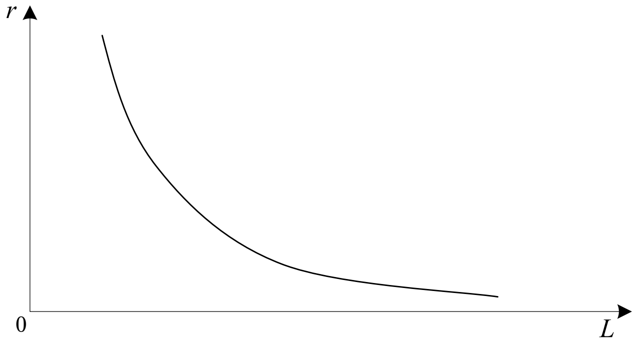


Рис. 7.5. **Спекулятивный спрос на деньги**

Инфляция приводит к снижению реальной доходности от приобретения облигаций. Используя уравнение Фишера, формулу для реальной доходности облигаций можно записать в виде:

$$a = r - H.$$

Но высокий темп прироста инфляции также обесценивает деньги, хранящиеся в кассе. Поэтому чем больше темп прироста инфляции, тем ниже спрос на деньги.

Таким образом, в общем случае спрос на реальные кассовые остатки является функцией трех аргументов: дохода, процентной ставки и темпа прироста инфляции. Это записывают в виде формулы

$$\left(\frac{M}{P}\right)^D = f\left(Y, r, H\right).$$

С увеличением дохода Y спрос увеличивается, а с увеличением ставки r и темпа прироста инфляции H спрос на деньги уменьшается. В зависимости от r спрос на реальные кассовые остатки иногда представляют в виде прямой линии, описываемой соотношением

$$\left(\frac{M}{P}\right)^D = kY - hr. \qquad \textbf{(7.1)}$$

График функции на реальные кассовые остатки представлен на рис. 7.6.

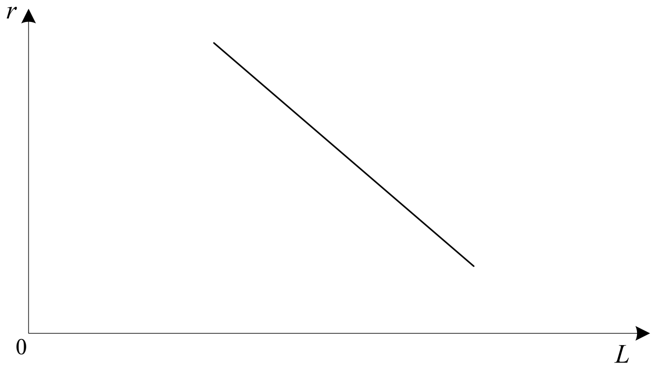


Рис. 7.5. **Спрос на реальные кассовые остатки**

С ростом реального дохода и при уменьшении темпа прироста инфляции линия смещается вправо, при уменьшении дохода и при росте темпа инфляции — влево.

Кейнсианцы полагают, что денежная политика слабо влияет на развитие экономики в целом. В результате этого возник конфликт между монетаристами и кейнсианцами.

7.4.4. Монетаристская теория спроса на деньги

Монетаризм — экономическая теория, рассматривающая деньги, находящиеся в обращении, в качестве основного фактора в макроэкономике. Основоположником этой теории считают американского экономиста М. Фридмена.

Монетаристы не приняли кейнсианский спекулятивный мотив спроса на деньги. Наличие на рынке множества активов, приносящих доход, является причиной отказа от хранения денег с целью спекуляции на ценных бумагах. Спрос на деньги объясняется в рамках теории оптимизации имущества экономических субъектов, которые формируют оптимальный портфель из активов, доходность которых является случайной величиной с разной степенью риска потери этой доходности. Известно, что чем больше ожидаемая доходность, тем больше риск ее снижения. Состав оптимального портфеля формируется, например, по следующему критерию: доля каждого из активов выбирается таким образом, что при заданной доходности риск портфеля будет минимальным (Марковец).

Монетаристы считают, что функция спроса на деньги L зависит от предполагаемой доходности на акции r_a, от предполагаемой доходности на облигации r_o, от ожидаемого темпа прироста инфляции H и от совокупного богатства W. Эту функцию можно записать в виде:

$$L = L\left(r_a, r_o, H, W\right).$$

Монетаристы, основываясь на своих представлениях о спросе на деньги, считают, что денежная политика государства является основой общей политики. Поэтому денежно-кредитная политика имеет решающее значение в развитии экономики. Монетаристы считают также, что рынок влияет на изменение денежной массы в краткосрочном и долгосрочном плане. В краткосрочном плане нарастание денежной массы вызывает снижение процентной ставки, расширение спроса и снижение безработицы. В долгосрочном плане увеличение денежной массы инициирует инвестиции, что приводит к увеличению выхода, доходов и к повышению процентной ставки.

М. Фридмен сформулировал «денежное правило», по которому среднегодовой прирост денежной массы может составлять 4—5% в год при среднегодовом увеличении ВНП примерно на 3% и незначительном снижении скорости обращения денег. Это означает, что денежную массу следует наращивать с постоянным темпом независимо от динамики и циклических колебаний конъюнктуры рынка. Можно ограничивать рост денежной массы постоянным темпом, но отнюдь не сокращать эту массу.

Современная теория денег пытается объединить монетаризм и кейнсианство. Считается, что государство в целях воздействия на экономику должно использовать как ту, так и другую теорию.

7.5. Предложение денег

Предложение денег регулируется Центральным банком и коммерческими банками. *Предложение денег* — наличность вне банковской системы плюс депозиты (напомним, что слово «предложение» на английском языке пишется как supply):

$$M^S = C + D,$$

где M^S — предложение денег; C — наличность вне банковской системы; D — депозиты.

Современные банки — система с частичным резервным покрытием. Это значит, что часть вкладов по депозитам банки используют в виде резервов, а другую часть выдают в виде ссуд по заданной процентной ставке. При этом резервы делятся на обязательные и избыточные. Резервы нужны для того, чтобы банки могли погасить задолженности без особого труда в случае обращения вкладчиков в критических ситуациях. Норма обязательного резерва устанавливается Центральным банком, а норму избыточного резерва коммерческие банки определяют сами. Норма обязательного резерва в России составляет 3,5% по привлеченным средствам юридических лиц в рублях и привлеченным средствам юридических и физических лиц в валюте [3]. В общем случае величина нормы обязательных резервов зависит от вида депозита и срока.

Норма резерва — отношение суммы резервов к сумме депозитов. Норму резерва будем обозначать r_d, а сумму резервов буквой R. Тогда формулу для нормы резервов можно записать в виде:

$$r_d = \frac{R}{D}.$$

В модели предложения денег используются два мультипликатора: банковский и денежный.

Банковский мультипликатор определяется из следующих соображений. Пусть в банке № 1 открыт счет на сумму D_1. Этот банк резервирует $r_d \cdot D_1$ руб., а $(1-r_d)\cdot D_1$ использовал в качестве ссуды. Должник на эти деньги купил материалы, а продавец этих материалов поместил деньги на депозит в банк № 2. Этот банк, в свою очередь, резервирует $(1-r_d)\cdot r_d \cdot D_1$ руб., а в качестве ссуды выдает

$$(1-r_d)\cdot D_1 - (1-r_d)\cdot r_d \cdot D_1 = (1-r_d)\cdot D_1 \cdot (1-r_d) = (1-r_d)^2 \cdot D_1 \text{ руб.},$$

где r_d — норма обязательного резерва.

Банк № 3 в качестве ссуды выдает $(1-r_d)^3 \cdot D_1$ руб. и т.д. Таким образом, суммарное количество денег на депозитах, или количество безналичных денег, равно:

$$D = \left(1 + (1-r_d) + (1-r_d)^2 + (1-r_d)^3 + \ldots\right)\cdot D_1 = \frac{D_1}{1-(1-r_d)} = \frac{1}{r_d}\cdot D_1 = m_d \cdot D_1.$$

Здесь величина $m_d = \frac{1}{r_d}$ называется банковским, или депозитным, мультипликатором.

Следует иметь в виду, что приведенная модель банковского мультипликатора может заметно отличаться от реальности. Это связано с возможностью утечки денег в систему наличного обращения.

Взятая заемщиком сумма не обязательно вернется в банковскую систему в качестве депонента. Избыточные резервы также влияют на величину депозитного мультипликатора.

Помимо предложения денег M^S в теории используется другое понятие, называемое *денежная база*, или *деньги повышенной эффективности*. Денежная база рассчитывается по формуле

$$B = C + R,$$

где B — денежная база; C — наличность; R — резервы.

Воздействуя на денежную базу, Центральный банк влияет на объем денежной базы. Действительно, от этого банка зависит объем наличности в стране и сумма резервов, так как Центральный банк определяет норму резерва.

Денежный мультипликатор m — отношение предложения денег M^S к денежной базе B:

$$m = \frac{M^S}{B} = \frac{C+D}{C+R} = \frac{C/D+1}{C/D+R/D} = \frac{c_d+1}{c_d+r_d},$$

где $c_d = C/D$ — коэффициент депонирования денег.

Из последней формулы следует выражение

$$M^S = \frac{c_d+1}{c_d+r_d} \cdot B.$$

Из приведенных формул видно, что на денежный мультипликатор влияет норма резервов r_d и коэффициент депонирования денег c_d. Денежный мультипликатор $m = \frac{c_d+1}{c_d+r_d} > 1$, так как $r_d = \frac{R}{D} < 1$. Поэтому предложение денег всегда больше денежной базы, т.е. $M^S > B$.

Если Центральный банк намерен поддерживать предложение денег на фиксированном уровне независимо от процентной ставки, то линия предложения будет выглядеть в виде прямой, описываемой уравнением $M = M^S = \text{const}$. График этой прямой представлен на рис. 7.6.

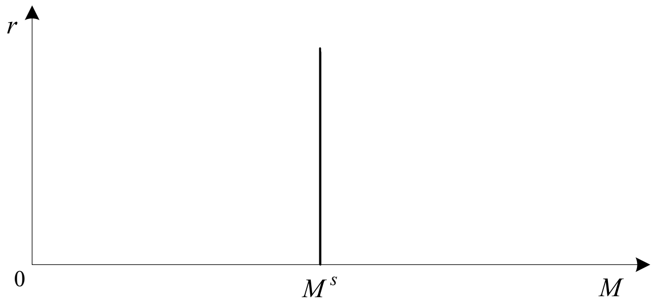


Рис. 7.6. **График функции предложения**

7.6. Равновесие на рынке денег

Равновесный уровень процентной ставки устанавливается в точке пересечения графиков функции спроса и предложения (рис. 7.7).

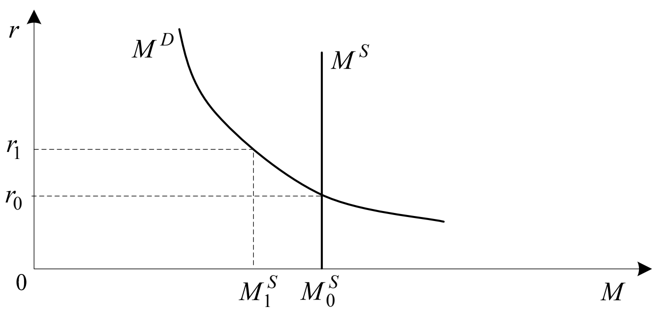


Рис. 7.7. **Точка равновесия на рынке денег**

Равновесие на денежном рынке достигается в точке $\left(M_0^S, r_0\right)$. Подвижная процентная ставка удерживает в равновесии денежный рынок. При увеличении процентной ставки до r_1 снижается цена облигаций и увеличивается их доходность. Потребность в деньгах уменьшается, предложение денег превышает спрос на них. В такой ситуации у экономических субъектов накапливается наличность, и они будут покупать облигации, что вызовет повышение их рыночной цены, т.е. приведет к снижению процентной ставки и к повышению спроса на деньги. Постепенно равновесие на рынке восстановится.

При изменении дохода линия спроса сдвигается вправо или влево. Допустим, что доход увеличился. Тогда линия спроса сдвинется вправо из положения M_1^D в положение M_2^D (рис. 7.8). В этом случае процентная ставка повышается с r_0 до r_1.

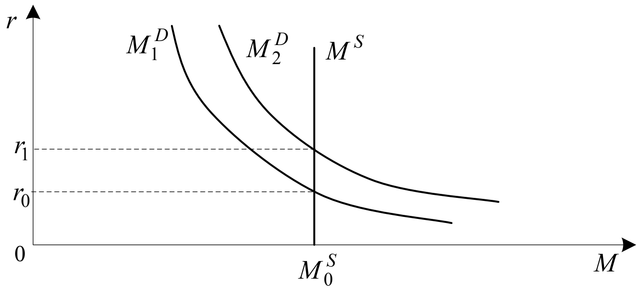


Рис. 7.8. **Точка равновесия на рынке денег при увеличении дохода**

Сокращение предложения денег Центральным банком приведет к сдвигу линии предложения влево. Прямая M_1^S переместится в положение M_2^S (рис. 7.9). Процентная ставка повысилась с r_1 до r_2.

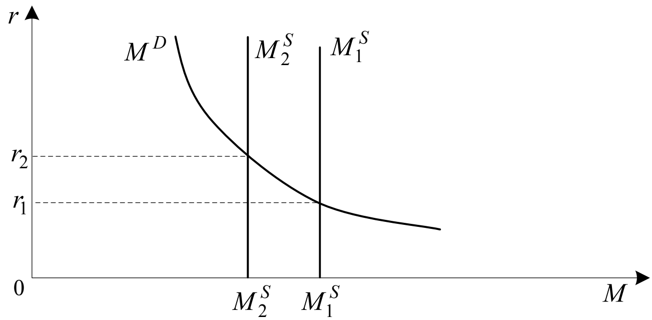


Рис. 7.9. **Точка равновесия на рынке денег при сокращении предложения денег**

Упражнения

Задача 7.1. На 1 января 2003 г. в Российской Федерации денежный агрегат $M0$ = 763,3 млрд руб., а денежный агрегат $M2$ = = 2119,6 млрд руб.

Найти коэффициент наличности и сумму безналичных денег.

Задача 7.2. Ниже приведены темпы прироста инфляции по месяцам.

Месяц	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й	8-й	9-й	10-й	11-й	12-й
Темп прироста инфляции, %	1,2	1	0,8	0,6	1,4	0,3	0,9	0,7	0,2	0,4	0,3	0,2

Определить темп прироста инфляции за год и среднемесячный темп прироста инфляции.

Задача 7.3. Используя уравнение Фишера, найти реальную доходность пенсионера при хранении им своих средств на пенсионном счете Сбербанка, при наращении по ставке 4% годовых и при годовом темпе прироста инфляции 9%.

Задача 7.4. Номинальная цена облигации равна 500 руб., ее рыночная стоимость — 480 руб.

Определить курс.

Задача 7.5. Облигация со сроком 7 лет, проценты по которой выплачиваются ежеквартально в размере 100 руб. (125 руб.), имеет номинал 5000 руб.

Рассчитать ее курс и цену при ставке дисконтирования 10% годовых.

Задача 7.6. Норма обязательного резерва составляет 15%.

Определить, во сколько раз увеличится депозит при открытии нового счета.

Задача 7.7. Сумма резервов равна 100 млрд руб., а норма обязательных резервов — 20%. Спрос на наличность составляет 30% от суммы депозитов.

Определить предложение денег.

Библиографический список

1. *Агапова Т.А.*, *Серегина С.Ф.* Макроэкономика. М.: ДиС, 1997.
2. *Вечканов Г.С.*, *Вечканова Г.Р.* Макроэкономика. М.: Питер, 2006.
3. *Киселева Е.А.* Макроэкономика. М.: Эксмо, 2007.
4. *Колемаев В.А.* Математическая экономика. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005.
5. *Тарасевич Л.С.*, *Гребенников П.И.*, *Леусский А.И.* Макроэкономика. М.: Высшее образование, 2007.

Глава 8

Макроэкономическое равновесие на товарном и денежном рынках

8.1. Линия инвестиции-сбережения (*IS*)

Линия *IS* (investment — инвестиция, saving-сбережение) устанавливает связь инвестиций, или сбережений, с выпуском (доходом) и процентной ставкой [1—4]. Графический принцип построения этой линии демонстрируется на рис. 8.1.

Рассматриваемая модель справедлива при выполнении условия $I = S$, т.е. при условии равенства инвестиций и сбережений.

В квадранте **I** изображен кейнсианский крест. Линия запланированных расходов при увеличении процентной ставки $(r_2 > r_1)$, или при уменьшении инвестиций $I(r_2) < (I(r_1))$, смещается вниз. Доход с Y_1 уменьшается до Y_2.

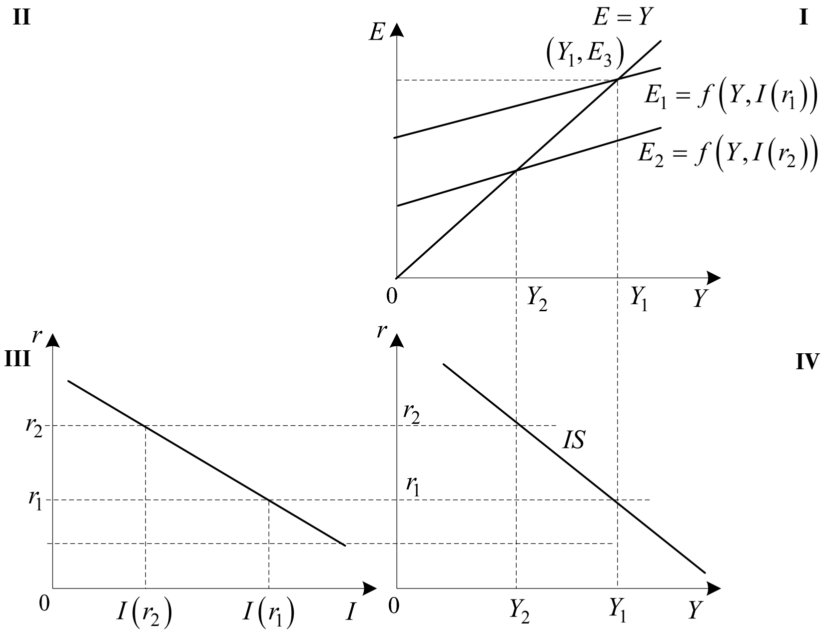


Рис. 8.1. **Построение линии *IS***

В квадранте **III** показана линия спроса на инвестиции, связывающая инвестиции и процентную ставку. При увеличении процентной ставки инвестиции уменьшаются. Подробно эта связь была рассмотрена в § 4.14.

В квадранте **IV** приведен график функции $r(Y)$, который называется линией *IS*. Этот график построен по графикам квадрантов **I** и **III**. Для построения точки (Y_1, r_1) из точки (Y_1, E_1) проводят прямую линию параллельно оси $0E$ и оси $0r$. Из точки $(I(r_1), r_1)$ графика квадранта **III** проводят прямую линию, параллельную оси $0I$ и оси $0Y$, до пересечения с предыдущей прямой. Получили точку с координатами (Y_1, r_1). Аналогично находят точку с координатами (Y_2, r_2). Через две эти точки и проводим прямую, которая является искомой линией *IS*.

Линия инвестиции-сбережения (*IS*) позволяет показать функциональные связи между инвестициями-сбережениями, процентной ставкой и выпуском (валовым внутренним продуктом). Каждая точка на линии *IS* связывает выпуск, процентную ставку и инвестиции-сбережения.

Рассмотрим любую точку, лежащую ниже линии *IS*, например, точку (Y_1, r_3). Так как $r_3 < r_1$, то запланированные расходы $E_3 > E_1$. То есть запланированные расходы больше выхода, или валового национального продукта. А это значит, что предложение меньше спроса.

Если же точки лежат выше линии *IS*, то валовой внутренний продукт больше запланированных расходов. А это значит, что предложение больше спроса.

Функцию $r(Y)$, или $Y(r)$, можно выразить в аналитическом виде. Для этого потребуются соотношения **(6.2)**, **(6.1)**, **(4.23)** с учетом налоговых выплат и функция чистого экспорта [1]. Запишем их здесь вместе:

$Y = C + I + G + X_n$ — основное макроэкономическое соотношение;

$C = a + b(Y - N)$ — функция потребления при учете налогов;

$I = I_0 - d \cdot r$ — функция инвестиций;

$X_n = X_{n0} - m' \cdot Y - g \cdot r$ — функция чистого экспорта,

где Y — выпуск (доход); C — потребительские расходы домашних хозяйств; I — инвестиции; G — государственные расходы; X_n — чистый экспорт; a — автономное потребление; b — предельная склонность к потреблению; N — прямые налоги; I_0 — предельная величина инвестиций при $r \to 0$, d и g — коэффициенты пропорциональности; r — процентная ставка; $m' = \frac{\Delta M}{\Delta Y}$ — предельная склонность к импортированию, ΔM — изменение расходов на импорт, ΔY — изменение дохода.

В основное макроэкономическое соотношение подставим три приведенные функции:

$$Y = a + b(Y - N) + I_0 - d \cdot r + G + X_{n0} - m' \cdot Y - g \cdot r;$$

$$Y = \frac{a - bN + I_0 + G + X_{n0}}{1 - b + m'} - \frac{d + g}{1 - b + m'} \cdot r. \qquad \textbf{(8.1)}$$

Обратная функция имеет вид:

$$r = \frac{a - bN + I_0 + G + X_{n0}}{d + g} - \frac{1 - b + m'}{d + g} Y. \qquad \textbf{(8.2)}$$

Полученные функции являются прямыми линиями. В общем случае эти линии могут иметь более сложный вид. Функции получились линейными, потому что исходные функции инвестиций и чистого экспорта от процентной ставки были заданы в виде прямых линий.

8.2. Линия предпочтение ликвидности-деньги (*LM*)

Линия *LM* (liquidity preference — предпочтение ликвидности, money — деньги) устанавливает связь спроса на реальные кассовые остатки с выпуском (доходом) и процентной ставкой. Графический принцип построения этой линии демонстрируется на рис. 8.2.

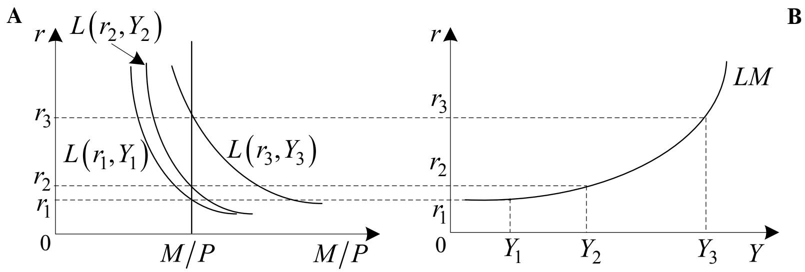


Рис. 8.2. **Построение линии *LM***

В квадранте **А** рис. 8.2 представлен равновесный уровень процентной ставки в точке пересечения графиков функции спроса $L(r_1, Y_1)$ и денежного предложения M/P, заданного Центральным банком. В квадранте **В** в системе координат выпуск-процентная ставка строится точка с координатами (Y_1, r_1). При увеличении дохода с Y_1 до Y_2 линия спроса в квадранте **А** сдвигается вправо и занимает положение $L(r_2, Y_2)$. В этом случае процентная ставка повышается с r_1 до r_2. В квадранте **В** в системе координат выпуск-процентная ставка строится еще одна точка с координатами (Y_2, r_2). Точно так же строится точка с координатами (Y_3, r_3). Проведя через эти точки кривую, получим линию *LM*.

На линии LM показаны все комбинации Y и r, которые удовлетворяют функции спроса на деньги при заданном Центральным банком денежном предложении. Во всех точках этой линии спрос на деньги равен их предложению. Кривая LM показывает, как должна изменяться процентная ставка при изменении выхода при условии сохранения равновесия на денежном рынке.

На линии LM можно выделить три участка. Самый левый участок практически параллелен оси $0Y$. Область его определения называют кейнсианской областью. Самый правый участок практически перпендикулярен оси $0Y$. Этот участок называют классической областью. И, наконец, выделяют промежуточный участок, на котором ставка растет при увеличении выпуска.

Иногда кривую LM представляют в виде прямой линии.

Спрос на реальные кассовые остатки будем представлять в виде линейной функции **(7.1)**, имеющей вид

$$\frac{M}{P} = kY - hr,$$

где M — количество денег в экономике; P — уровень цен; Y — объем выпуска в натуральном исчислении; k и h — коэффициенты пропорциональности; r — процентная ставка.

Аналитическую зависимость линии LM в виде линейной функции можно получить из этой формулы, представив ее в виде уравнения, которое решают относительно Y и r:

$$Y = \frac{h}{k} \cdot r + \frac{1}{k} \cdot \frac{M}{P}; \quad \textbf{(8.3)}$$

$$r = \frac{k}{h} \cdot Y - \frac{1}{h} \cdot \frac{M}{P}. \quad \textbf{(8.4)}$$

Как следует из двух последних формул, увеличение M или уменьшение P ведет к увеличению отношения M/P, а это смещает линию LM вправо.

Рассмотрим любую точку, лежащую выше линии LM, например, точку (Y_1, r_2). Значение спроса на деньги в этой точке равно $M/P = kY_1 - hr_2$. Поскольку $r_2 > r_1$, то спрос на деньги упал, т.е. спрос стал меньше, чем предложение. Во всех точках, лежащих ниже линии LM, спрос превышает предложение.

8.3. Модель *IS—LM*

Макроэкономическое равновесие на товарном и денежном рынках достигается в точке пересечения линий IS и LM в точке (Y_0, r_0) (рис. 8.3). Точка равновесия называется *эффективным спросом.*

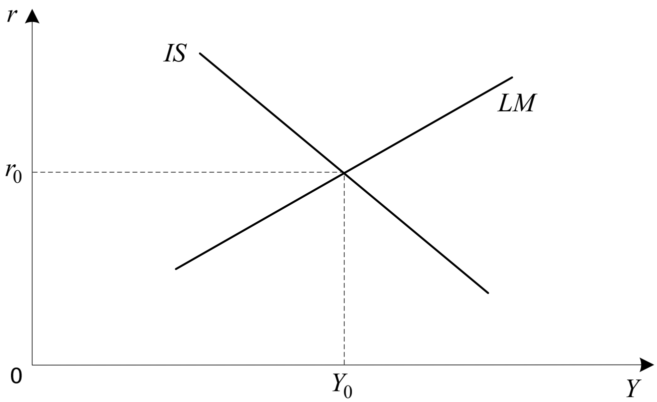


Рис 8.3. **Макроэкономическое равновесие на товарном и денежном рынках**

Для определения координат Y_0 и r_0 надо решить систему из двух уравнений, например, **(8.2)** и **(8.3)**. Для определения Y_0 **(8.2)** подставим в **(8.3)**. В результате получим:

$$Y = \frac{h}{k} \cdot \frac{a - bN + I_0 + G + X_{n0}}{d + g} - \frac{h}{k} \cdot \frac{1 - b + m'}{d + g} Y + \frac{1}{k} \cdot \frac{M}{P}.$$

Решив это уравнение относительно Y, найдем:

$$Y_0 = \frac{h\left(a - bN + I_0 + G + X_{n0}\right)}{k\left(d + g\right) + h\left(1 - b + m'\right)} + \frac{d + g}{k\left(d + g\right) + h\left(1 - b + m'\right)} \cdot \frac{M}{P}.$$

Для определения r_0 **(8.3)** подставим в **(8.2)**. В результате найдем:

$$r = \frac{a - bN + I_0 + G + X_{n0}}{d + g} - \frac{1 - b + m'}{d + g} \frac{h}{k} \cdot r - \frac{1 - b + m'}{d + g} \frac{1}{k} \cdot \frac{M}{P}.$$

Отсюда находим процентную ставку:

$$r_0 = \frac{k\left(a - bN + I_0 + G + X_{n0}\right)}{k\left(d + g\right) + h\left(1 - b + m'\right)} - \frac{1 - b + m'}{k\left(d + g\right) + h\left(1 - b + m'\right)} \cdot \frac{M}{P}.$$

▷ **Пример 8.1.** Пусть функция потребления имеет вид: $C = 1500 + 0,72 \cdot (Y - N)$, ставка прямого налогообложения принята 50%, функция инвестиций описывается соотношением $I = 800 - 4600 \cdot r$, функция чистого экспорта — соотношением $X_n = 700 - 0,06 \cdot Y - 1000 \cdot r$, спрос на реальные кассовые остатки — $M/P = \frac{Y}{2} - 1000 \cdot r$, государственные расходы $G = 850$, номинальное предложение денег $M = 4000$, уровень цен $P = 2$.

Найти равновесный уровень процентной ставки и дохода.

Р е ш е н и е. Для получения уравнения линии *IS* подставим исходные данные в основное макроэкономическое соотношение:

$$Y = C + I + G + X_n =$$
$$= 1500 + 0,72 \cdot (1 - 0,5) \cdot Y + 800 - 4600 \cdot r + 850 + 700 - 0,06 \cdot Y - 1000 \cdot r.$$

Проведя преобразования, найдем:

$$Y = 5500 - 8000 \cdot r.$$

Для получения уравнения линии *LM* в функцию спроса на реальные кассовые остатки подставим значения для $M = 4000$ и для $P = 2$:

$$\frac{4000}{2} = \frac{Y}{2} - 1000 \cdot r.$$

Отсюда находим уравнение кривой *LM*:

$$Y = 4000 + 2000 \cdot r.$$

Для получения равновесного уровня процентной ставки приравняем правые части уравнений линий *IS* и *LM*:

$$5500 - 8000 \cdot r = 4000 + 2000 \cdot r.$$

Отсюда находим равновесный уровень процентной ставки:

$$r_0 = 0,15, \quad \text{или} \quad 15\%.$$

Равновесный уровень дохода равен:

$$Y_0 = 4000 + 2000 \cdot r_0 = 4000 + 2000 \cdot 0,15 = 4300. \quad ◀$$

8.4. Динамика установления макроэкономического равновесия на совместном рынке

Выше было показано, что линии *IS* и *LM* делят плоскость на области избытка и дефицита предложения.

Во всех точках, лежащих выше линии *IS*, валовой внутренний продукт больше запланированных расходов, т.е. предложение больше спроса, а во всех точках, лежащих ниже этой линии, спрос превышает предложение.

Во всех точках, лежащих выше линии *LM*, предложение больше спроса, а во всех точках, лежащих ниже линии *LM*, спрос превышает предложение.

Совместно эти линии делят всю плоскость на четыре области (рис. 8.4).

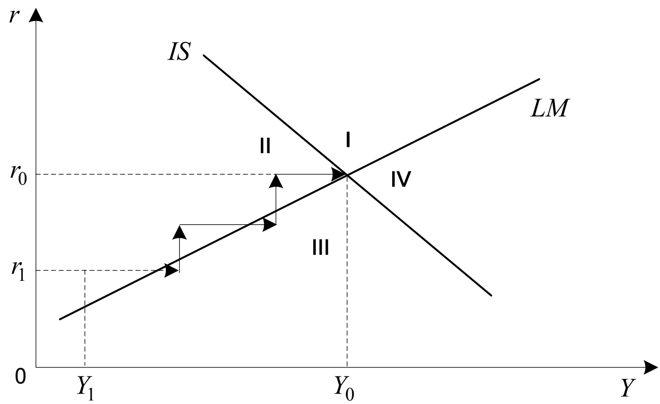


Рис 8.4. **Динамика установления макроэкономического равновесия на совместном рынке**

В области **I** существует избыток предложения как на товарном, так и на денежном рынке. В области **II** существует избыток предложения на денежном рынке и дефицит предложения на товарном рынке. В области **III** существует дефицит предложения как на товарном, так и на денежном рынке. В области **IV** существует избыток предложения на товарном рынке и дефицит предложения на денежном рынке.

При отклонении фактических значений процентной ставки r и выпуска Y от равновесных значений Y_0 и r_0 эти значения стремятся возвратиться в точку равновесия. Действительно, пусть экономика находится в точке (Y_1, r_1). Это область избытка предложения на денежном рынке и дефицита предложения на товарном рынке. Движение точки из (Y_1, r_1) в точку (Y_0, r_0) может происходить по множеству траекторий, вид которых зависит от поведения экономических субъектов. Поскольку на товарном рынке существует дефицит, то этот дефицит будет устранен за счет расширения производства и увеличения выпуска, что показано на рис. 8.4 пунктирной стрелочкой. Это приведет к росту дохода, на рынке денег возникнет дефицит, и процентная ставка начнет расти. На рис. 8.4 это показано сплошной стрелочкой. При увеличении процентной ставки возникает товарный дефицит, что приводит к необходимости расширения производства. Процесс повторяется до тех пор, пока не наступят условия равновесия.

8.5. Эффективность денежно-кредитной политики

Модель *IS—LM* можно использовать для анализа денежно-кредитной политики над состоянием экономики.

Увеличение предложения денег позволяет увеличить выход, т.е. валовой внутренний продукт. Это поясняется на рис. 8.5.

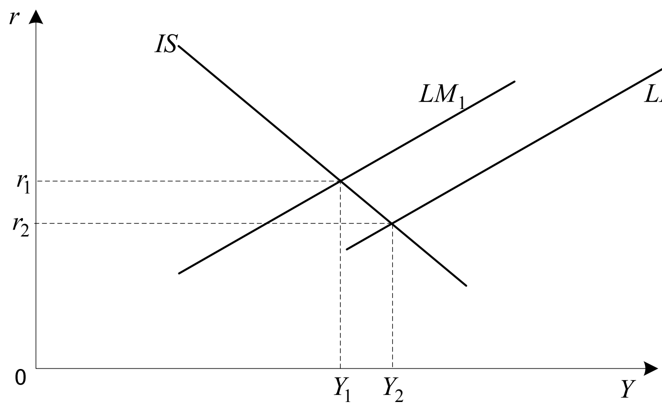


Рис 8.5. **Связь увеличения предложения денег с увеличением выхода**

При увеличении предложения денег линия LM_1 смещается вправо и занимает положение LM_2. Процентная ставка понижается с r_1 до r_2, что стимулирует рост инвестиций, а выпуск повышается с Y_1 до Y_2.

Увеличение предложения денег также влияет на величину чистого экспорта, который был определен формулой $X_n = X_{n0} - m' \cdot Y - g \cdot r$. Отсюда видно, что повышение выхода Y снижает величину чистого экспорта, а снижение процентной ставки r повышает эту величину. Результирующее изменение величины чистого экспорта будет зависеть от величины изменения выхода и процентной ставки, а также от величины предельной склонности к импортированию m' и величины коэффициента g.

8.6. Эффективность бюджетно-налоговой политики

Бюджетно-налоговая политика также влияет на состояние экономики. Она может проявляться в изменении налогов и государственных расходов. Например, снижение налогов позволяет увеличить выход, что поясняется на рис. 8.6.

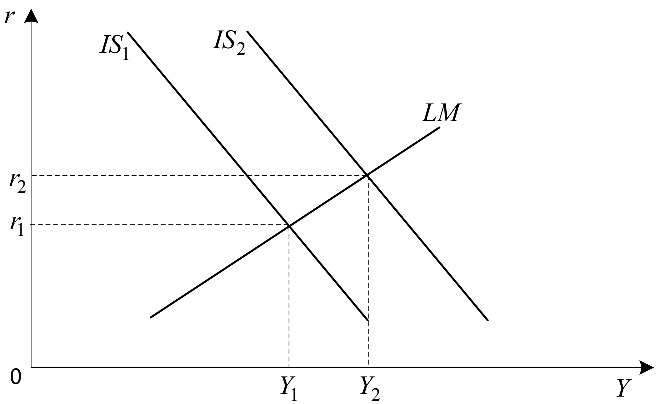


Рис 8.6. **Связь бюджетно-налоговой политики с изменением выхода и процентной ставки**

При снижении налога линия IS смещается вправо, что приводит к увеличению выхода. За счет эффекта мультипликатора выход увеличивается. Линия IS_1 занимает положение IS_2. Процентная ставка увеличивается с r_1 до r_2, что стимулирует снижение инвестиций, а выпуск повышается с Y_1 до Y_2. Увеличение процентной ставки снижает также чистый экспорт. Падение чистого экспорта связано и с увеличением дохода.

Аналогичный эффект оказывает на экономику и повышение государственных расходов, а также увеличение объема автономных инвестиций.

▷ **Пример 8.2.** Пусть функция потребления имеет вид $C = 1500 + 0,72 \cdot (Y - N)$, ставка прямого налогообложения равна 50%, функция инвестиций описывается соотношением $I = 800 - 4600 \cdot r$, функция чистого экспорта — соотношением $X_n = 700 - 0,06 \cdot Y - 1000 \cdot r$, спрос на реальные кассовые остатки — $\frac{M}{P} = \frac{Y}{2} - 1000 \cdot r$, государственные расходы $G = 850$, номинальное предложение денег $M = 4000$, уровень цен $P = 2$.

Определить новое значение номинального предложения денег при увеличении ставки прямого налогообложения до 64% при сохранении остальных параметров неизменными, а также новое значение выпуска.

Р е ш е н и е. Равновесный уровень процентной ставки для первоначальных условий примера был определен в примере 8.1 и составил:

$$r_0 = 0,15, \text{ или } 15\%; \quad Y_0 = 4300.$$

Полученное там же уравнение линии *LM* имеет вид:

$$Y = 4000 + 2000 \cdot r,$$

а уравнение линии *IS* имеет вид:

$$Y = 5500 - 8000 \cdot r.$$

При увеличении ставки прямого налогообложения до 64% уравнение линии *IS* преобразуется к виду:

$$Y = 1500 + 0,72 \cdot (1 - 0,64) \cdot Y + 800 - 4600 \cdot r + \\ + 850 + 700 - 0,06 \cdot Y - 1000 \cdot r.$$

Проведя преобразования, найдем

$$Y = 4812,5 - 7000 \cdot r.$$

Равновесный уровень новой процентной ставки находим из уравнения

$$4812,5 - 7000 \cdot r = 4000 + 2000 \cdot r;$$

$$r_1 = 0,0903, \text{ или } 9,03\%.$$

Равновесный уровень нового выхода равен:

$$Y_1 = 4000 + 2000 \cdot r_1 = 4000 + 2000 \cdot 0,0903 = 4180,6.$$

Для того чтобы процентная ставка осталась равной 15%, необходимо снизить денежное предложение с величины M до M_1. Тогда уравнение кривой LM можно представить в виде:

$$Y = M_1 + 2000 \cdot r.$$

Новое значение денежного предложения найдем из уравнения

$$4812,5 - 7000 \cdot r = M_1 + 2000 \cdot r,$$

подставив сюда величину процентной ставки, равную 15%:

$$M_1 = 4812,5 - 9000 \cdot 0,15 = 3462,5.$$

Новое значение выпуска равно:

$$Y_2 = 4812,5 - 7000 \cdot r = 4812,5 - 7000 \cdot 0,15 = 3762,5.$$

Сохранив процентную ставку, понизили выпуск.
Рассмотрим процесс изменений на графике, представленном на рис. 8.7.

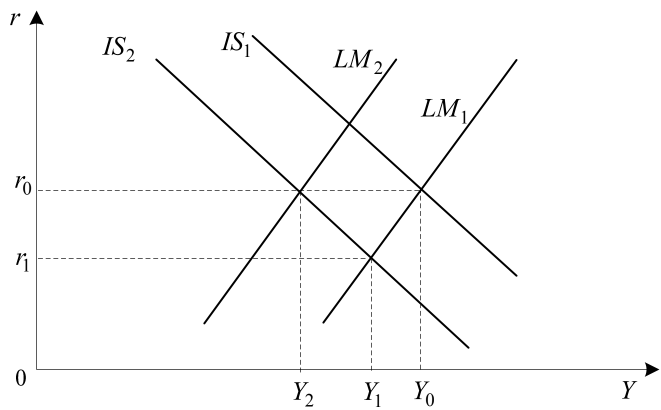


Рис 8.7. **Влияние изменения налоговой ставки и денежного предложения на состояние экономики**

Первоначальная точка равновесия (Y_0, r_0) является точкой пересечения линий IS_1 и LM_1. После повышения налоговой ставки линия IS_1 сместилась в положение IS_2. Это приведет к снижению процентной ставки до r_1 и выхода до Y_1. По условию задачи для сохранения прежней процентной ставки, равной r_0, необходимо понизить денежное предложение. Такое понижение приведет к смещению линии LM_1 в положение LM_2. Линия LM_2 строится при выполнении условия $r = r_0$. Новая точка равновесия определяется точкой пересечения линий IS_2 и LM_2. Координаты этой точки равны (Y_2, r_0). ◄

8.7. Ликвидная ловушка

При совместном равновесии на товарном и денежном рынках, достигнутом в кейнсианской области кривой LM, экономика попадает в ликвидную ловушку. Смысл этой ловушки поясняется на рис. 8.8.

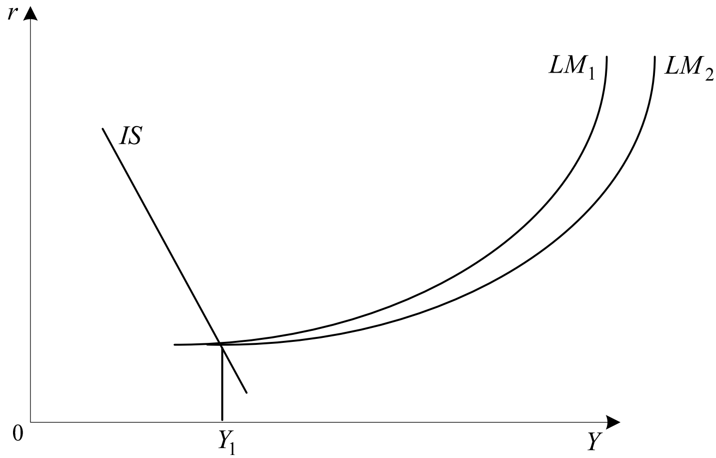


Рис. 8.8. **Схема ликвидной ловушки**

Точкой равновесия является точка пересечения кривой IS с кривой LM_1. Выпуск в этом случае равен Y_1. Если Центральный банк захочет увеличить выпуск за счет изменения количества денег, то это приведет к смещению кривой LM_1 в положение LM_2. Как следует из рис. 8.8, выпуск в данном случае не изменится.

8.8. Модель совокупного спроса

Функцию совокупного спроса, или линию *AD*, можно построить графически. Будем считать, что потребление домашних хозяйств зависит только от реального дохода. Тогда построение линии совокупного спроса можно провести так, как показано на рис. 8.9.

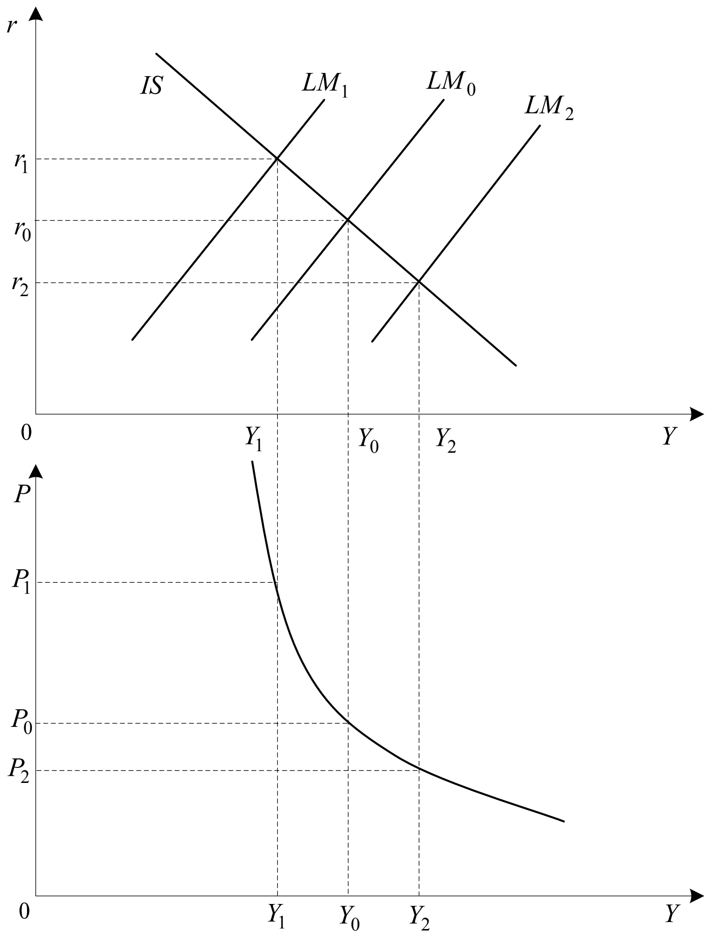


Рис. 8.9. **Построение линии совокупного спроса**

Первоначальное состояние на рынках товаров и денег представлено точкой пересечения линии *IS* и линии LM_0, что видно из верхнего графика рис. 8.9. Это точка с координатами (Y_0, r_0). Равновесие установилось при уровне цен, равном P_0. Это значение уровня цен отложим на оси ординат нижнего графика. Точка (Y_0, P_0) является одной из точек линии совокупного спроса. Если уровень цен увеличится до значения P_1, то при заданном номинальном количестве денег их реальная величина уменьшится, а кривая LM сдвинется влево и займет положение LM_1. При условии, что потребление домашних хозяйств зависит только от реального дохода, кривая IS не изменит своего положения. Новая точка равновесия будет иметь координаты (Y_1, r_1), а новая точка, лежащая на линии совокупного спроса, — координаты (Y_1, P_1). Аналогично строится точка с координатами (Y_2, P_2). Соединив построенные точки, получим график линии совокупного спроса, представленный на нижней части рис. 8.9. Заметим, что если потребление домашних хозяйств зависит не только от реальных доходов, но и от реальных кассовых остатков как части имущества, то линия IS также будет перемещаться при изменении уровня цен. Координаты точек (Y_1, P_1) и (Y_2, P_2) будут несколько отличаться от представленных на рис. 8.9. Однако на виде линии совокупного спроса это не скажется.

Функцию совокупного спроса можно получить аналитически, подставив в уравнение **(8.1)** линии инвестиции-сбережения (*IS*) формулу **(8.4)** линии предпочтение ликвидности-деньги (*LM*). В результате получим

$$Y = \frac{a - bN + I_0 + G + X_{n0}}{1 - b + m'} - \frac{d + g}{1 - b + m'} \cdot \left(\frac{k}{h} \cdot Y - \frac{1}{h} \cdot \frac{M}{P} \right).$$

Проведя преобразования, найдем функцию совокупного спроса:

$$Y = \frac{h\left(a - bN + I_0 + G + X_{n0}\right)}{h\left(1 - b + m'\right) + k\left(d + g\right)} + \frac{d + g}{h\left(1 - b + m'\right) + k\left(d + g\right)} \cdot \frac{M}{P}.$$

▷ **Пример 8.3.** Пусть функция потребления имеет вид $C = 1500 + 0,72 \cdot (Y - N)$, ставка прямого налогообложения принята 50%, функция инвестиций описывается соотношением $I = 800 - 4600 \cdot r$, функция чистого экспорта — соотношением $X_n = 700 - 0,06 \cdot Y - 1000 \cdot r$, спрос на реальные кассовые остатки —

$\frac{M}{P} = \frac{Y}{2} - 1000 \cdot r$, государственные расходы $G = 850$, номинальное предложение денег $M = 4000$, уровень цен $P = 2$.

Определить функцию совокупного спроса и построить график.

Р е ш е н и е. По условиям примера имеем следующие показатели: автономное потребление $a = 1500$, предельная склонность к потреблению $b = 0{,}72$, предельная величина инвестиций при $r \to 0$ $I_0 = 800$, коэффициент пропорциональности $d = 4600$, предельная величина инвестиций при $r \to 0$ и $Y \to 0$, $X_{n0} = 700$, предельная склонность к импортированию $m' = 0{,}06$, коэффициент пропорциональности $g = 1000$, коэффициенты пропорциональности $k = 0{,}5$ и $h = 1000$. Налог $N = tY$, где t — налоговая ставка. Из решения примера 8.1 имеем в точке равновесия $Y_0 = 4300$:

$$Y = \frac{1000\left(1500 - 0{,}72 \cdot 0{,}5 \cdot 4300 + 800 + 850 + 700\right)}{1000\left(1 - 0{,}72 + 0{,}06\right) + 0{,}5\left(4600 + 1000\right)} +$$

$$+ \frac{4600 + 1000}{1000\left(1 - 0{,}72 + 0{,}06\right) + 0{,}5\left(4600 + 1000\right)} \cdot \frac{M}{P} = 733 + 1{,}78 \cdot \frac{M}{P}.$$

Для номинального предложения денег $M = 4000$ имеем:

$$Y = 733 + 1{,}78 \cdot \frac{4000}{P} = 733 + \frac{7134}{P}.$$

Таким образом, можно построить график функции спроса (рис. 8.10).

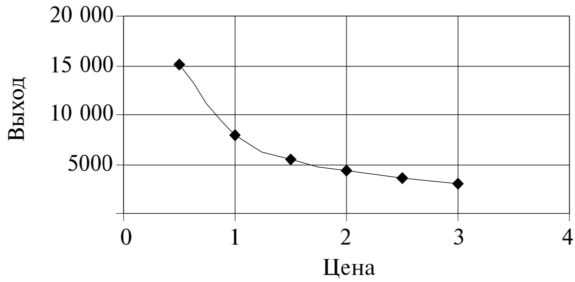


Рис. 8.10. **Функция спроса** ◄

Упражнения

Задача 8.1. Пусть функция потребления имеет вид $C = 1000 + 0,75 \cdot (Y - T)$, ставка прямого налогообложения принята 40%, функция инвестиций описывается соотношением $I = 500 - 4600 \cdot r$, функция чистого экспорта — соотношением $X_n = 400 - 0,05 \cdot Y - 800 \cdot r$, спрос на реальные кассовые остатки — $\frac{M}{P} = \frac{Y}{3} - 1000 \cdot r$, государственные расходы $G = 500$, номинальное предложение денег $M = 3000$, уровень цен $P = 3$.

Найти равновесный уровень процентной ставки и дохода.

Задача 8.2. Первоначальные условия соответствуют условиям задачи 8.1.

Определить новое значение номинального предложения денег при снижении ставки прямого налогообложения до 26,7% и новое значение выпуска при сохранении остальных параметров неизменными.

Задача 8.3. Условия задачи 8.1.

Определить функцию совокупного спроса и построить график.

Библиографический список

1. *Агапова Т.А.*, *Серегина С.Ф.* Макроэкономика. М.: ДиС, 1997.
2. *Вечканов Г.С.*, *Вечканова Г.Р.* Макроэкономика. М.: Питер, 2006.
3. *Киселева Е.А.* Макроэкономика. М.: Эксмо, 2007.
4. *Тарасевич Л.С.*, *Гребенников П.И.*, *Леусский А.И.* Макроэкономика. М.: Высшее образование, 2007.

Глава 9

Экономические циклы

9.1. Понятие экономических циклов

Вопросами экономических циклов занимались многие ученые, которые пытались установить их наличие на основе статистических данных за длительный период времени и выявить причину их существования. Очень упрощенно развитие экономики можно представить так, как показано на рис. 9.1. По оси абсцисс отложено время, а по оси ординат — состояние экономической конъюнктуры. Для характеристики экономической конъюнктуры используются валовой внутренний продукт или его годовые темпы прироста, уровень безработицы, личные доходы и т.д.

В долговременном периоде характеристика экономической конъюнктуры увеличивается во времени, что на рис. 9.1 демонстрирует тренд, который является некоторым усредненным показателем. Реальная характеристика экономической конъюнктуры колеблется около тренда. Эти периодические колебания и называются *экономическими циклами*.

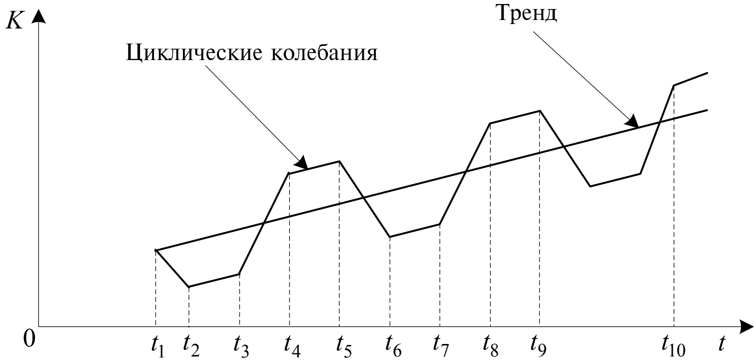


Рис. 9.1. **Циклическое развитие экономики**

Циклы характеризуются длительностью и фазами. *Длительность* цикла определяется как временной интервал между двумя одинаковыми состояниями экономики. Так, длительностью цикла может являться интервал $t_6 - t_2$, т.е. отрезок времени от момента t_2 до момента t_6, или интервал $t_7 - t_3$, или интервал $t_{10} - t_8$, и т.д.

На представленной модели (см. рис. 9.1) можно выделить четыре фазы цикла:

1) на интервале $t_5 t_6$ имеет место ***рецессия*** (спад, кризис). Этот период характеризуется резким ухудшением всех экономических показателей. Сокращаются доходы, объем производства, инвестиции. Увеличивается безработица, происходит затоваривание. Цены падают. Основной капитал обесценивается;

2) после рецессии наступает ***депрессия*** (стагнация), что характеризуется интервалом $t_6 t_7$. На этой фазе цикла приостанавливается падение цен и сокращаются товарные запасы. Производство практически не растет. Процентная ставка невелика. Наблюдается массовая безработица и низкая заработная плата;

3) следующая фаза — ***оживление*** (экспансия). На рис. 9.1 это интервал $t_7 t_8$. Растут заработная плата, цены, процентная ставка и спрос на товары потребления. Сокращается безработица. Происходит массовое обновление капитала;

4) после оживления наступает ***бум*** (подъем, пик) (интервал $t_8 t_9$). Безработица достигает своего минимума. Растут цены, процентная ставка, заработная плата, инвестиции, прибыли.

Различают три вида характеристик (параметров) экономической конъюнктуры [7]: опережающие, запаздывающие и соответствующие. *Опережающие* характеристики достигают минимума или максимума цикла ранее, чем достиг этих точек параметр, характеризующий цикл (изменения в запасах и в денежной массе). *Запаздывающие* характеристики достигают минимума или максимума цикла позже (число безработных, удельные расходы на заработную плату). *Соответствующие* характеристики достигают минимума или максимума одновременно с циклом (валовой внутренний продукт, темп прироста инфляции, объем промышленного производства).

Существуют различные подходы деления циклов по их длительности. Довольно часто рассматривают четыре типа циклов [4, 5]. Эти авторы считают, что *краткосрочные* циклы длительностью около трех лет связаны со сменой моделей техники и модификаций технологий на основе улучшающих инноваций в процессе рыночной конкуренции. *Среднесрочные* циклы длительностью около 10 лет связаны с обновлением поколений техники и технологий. Этим циклам сопутствуют среднесрочные экономические кризисы. *Долгосрочные* циклы длительностью около полувека связаны со сменой технологических укладов. *Сверхдолгосрочные* циклы длительностью 100—1000 лет связаны со сменой технологических способов производства в авангардных странах при переходе к очередной мировой цивилизации.

9.2. Мировые циклы Кондратьева

Наиболее убедительные исследования и обоснования наличия долгосрочных циклов принадлежат русскому экономисту Н.Д. Кондратьеву (1892—1938). Проводя статистический анализ динамики товарных цен, процентных ставок, заработной платы и т.п. для развитых стран в период 1770—1926 гг., он обнаружил существование трех экономических циклов. На сегодняшний день известно пять мировых циклов Кондратьева, занимающих следующие периоды: 1770—1830 гг., 1830—1885 гг., 1885—1935 гг., 1935—1980 гг., 1980—2022 гг. У разных авторов эти даты несколько различаются. На рис. 9.2 ромбами представлены начала, или минимумы, экономических циклов, а квадратами — максимумы экономических циклов.

Рис. 9.2. **Циклы Кондратьева:**
◆ — минимумы; ■ — максимумы

Подъем экономики в *первом* цикле связывают с началом первой промышленной революции. В это время реализуется много важных открытий и изобретений, воплощенных в прядильных и ткацких машинах, в машинах для обработки тканей. В этот период осуществляется переход от мануфактурного к машинному производству.

Второй подъем экономики объясняют усовершенствованием парового двигателя, появлением первого автомобиля, открытиями в электротехнике. В это время появляются паровоз и колесный пароход, что приводит к развитию железнодорожного и водного парового транспорта в Великобритании, Франции и США. Изобретен паровой молот, швейная машина и телеграф Морзе.

Начало *третьего* экономического цикла обусловлено созданием и внедрением изобретений в электротехнике и химии. Появилась динамо-машина постоянного тока, внедряется технология по электрической сварке и кузнечно-прессовой обработке, усовершенствован двигатель внутреннего сгорания, появился дизельный двигатель и т.д. Возникает научная организация труда, при которой действия рабочего полностью детерминированы движением машины технологического процесса. В начале XX в. начинают внедряться научная организация труда и механизм управления качеством каждого отдельного изделия, предложенные американским инженером Ф.У. Тейлором (1856—1915). В процессе производства работник выполнял только одну операцию по изготовлению продукта. Его вклад в увеличение ценности продукта был чрезвычайно мал. Поэтому он утрачивал ощущение причастности к конечному продукту. Отсюда возникла потребность в техническом контроле. Система Тейлора устанавливала требования к качеству продукции в виде допусков. Эти допуски контролируются при помощи шаблонов, называемых проходными и непроходными калибрами. Контроль осуществлялся специально подготовленными людьми — контролерами. Система Тейлора ввела деление продукции на качественную и дефектную, т.е. бракованную. Сегодня система Тейлора является лишь одним из звеньев в цепи составляющих управления качеством.

Во время *четвертого* цикла, начавшегося в середине 1930-х гг., сделано много принципиальных научных открытий, ставших основой развития экономики. Технологии развивались на основе рентгеновских лучей, открытий в радиотехнике и радиолокации, реактивного движения. Во многом стала понятна структура атомного ядра и законы деления ядер. Во время Второй мировой войны в США начались работы по созданию атомной бомбы. Были сделаны изобретения в области ракет и ракетных двигателей, атомной энергии, электроники, космоса, самолетостроения и др. На основе квантовой теории изобретен транзистор, а затем интегральные схемы. Это позволило создать быстродействующие электронные вычислительные машины.

Пятый цикл, начавшийся в начале 1980-х гг., характеризуется открытиями в области кибернетики, электроники, информатики, биотехнологии и генной инженерии. Переход к новому циклу сопровождается переходом от механизации к автоматизации.

9.3. Технологические уклады

Особенности технологических укладов подробно рассматриваются С.Ю. Глазьевым в его книге «Теория долгосрочного технико-экономического развития» [2], выпущенной в 1993 г.

Экономический цикл возникает и развивается при создании новых технологий, появившихся благодаря развитию науки и изобретательства. Эти технологии приводят к существенному повышению производительности труда и появлению новых товаров и услуг. Этот новый цикл и называют технологическим укладом. Из сказанного следует, что причиной цикличности развития экономики являются результаты развития науки, выраженные в новых технологиях. При этом происходит последовательное замещение целостных комплексов технологически сопряженных производств.

Технологический уклад — выделенные в технологической структуре экономики группы технологических совокупностей, связанных друг с другом однотипными технологическими цепями и образующие воспроизводящие целостности [2]. В рамках каждого уклада существует замкнутый цикл, куда входят производство первичных ресурсов, их переработка и выпуск товаров.

Технологическая совокупность — элемент технологически сопряженных производств, который сохраняет целостность в процессе развития экономического цикла. Технологическая совокупность состоит из технологических процессов, продукция которых используется, главным образом, внутри технологической совокупности. Примером технологической совокупности может служить производство ламповых радиоприемников. Другой пример технологической совокупности — это производство транзисторных приемников.

Зарождение нового технологического уклада происходит в условиях ориентации потребителей на традиционные товары. Новые товары не сразу осознаются как полезные для потребителя. Для этого требуется какое-то время. Например, только по прошествии некоторого времени после появление в России компьютеров спрос на них существенно увеличился. Каждый новый технологический уклад вначале использует старую инфраструктуру. Только по мере развития технологического уклада создается новый вид инфраструктуры.

С.Ю. Глазьев вводит обобщающую меру и эталон в экономических измерениях. К этим понятиям относится, в частности, научно-технический прогресс, учитывающий возрастающую структуру производственных фондов. В качестве меры и эталона предлагается также использовать производственные функции и характеристики макроэкономической динамики, выраженные через межотраслевой баланс.

С.Ю. Глазьев утверждает, что эмпирические исследования долгосрочных циклов показали принципиальную повторяемость происходящих в разных странах технологических изменений. Сюда относится сходство траекторий технико-экономического развития, а также тенденция к синхронизации макроэкономических колебаний и технологических изменений. В частности, одинаковая форма траекторий технико-экономического развития в странах как с рыночной, так и с директивно управляемой экономикой была выявлена в структуре энергопотребления, металлургии, добывающей промышленности, в динамике транспортной инфраструктуры.

Хозяйствующие субъекты стран, первыми начавших освоение базисных производств нового технологического уклада, накапливая производственный опыт, получают относительные преимущества и захватывают иностранные рынки, благодаря чему удлиняют для себя жизненный цикл технологического уклада.

Характеристики известных технологических укладов приведены в табл. 9.1 [2].

Если сравнить данные этой таблицы и рис. 9.2, то можно увидеть, что периоды технологических укладов и экономических циклов Кондратьева практически совпадают. Отсюда следует, что эти два понятия описывают одно и то же явление.

Таблица 9.1

№ п/п	*Период*	*Лидеры*	*Развитые страны*	*Ключевой фактор*	*Формирующее ядро уклада*
1	1770—1830	Великобритания, Франция, Бельгия	Германские государства, Нидерланды, Италия, Австро-Венгрия	Текстильные машины	Паровые двигатели, машиностроение
2	1830—1880	Великобритания, Франция, Бельгия, Германия, США	Италия, Швейцария, Нидерланды, Австро-Венгрия	Паровой двигатель, станки	Сталь, электроэнергетика, тяжелое машиностроение, неорганическая химия
3	1880—1930	Германия, США, Великобритания, Франция, Бельгия, Швейцария, Нидерланды	Италия, Дания, Австро-Венгрия, Канада, Япония, Испания, Россия, Швеция	Электродвигатель, сталь	Автомобилестроение, органическая химия, производство и переработка нефти, цветная металлургия, автодорожное строительство
4	1930—1980	Канада, Австралия, Япония, Швеция, Швейцария	СЭВ, Бразилия, Мексика, Тайвань, Индия	Двигатели внутреннего сгорания, нефтехимия	Радары, строительство трубопроводов, авиационная промышленность, производство и переработка газа
5	1980—2030	Япония, США, Германия, Швейцария, ЕС, Тайвань, Корея, Канада, Австралия	Бразилия, Мексика, Венесуэла, Китай, Индия, Индонезия, Турция, страны Восточной Европы	Микроэлектронная компонента	Биотехнологии, космическая техника и тонкая химия

9.4. Особенности циклического развития различных стран

Интересно проследить ведущую роль стран в развитии циклов Кондратьева [1]. В конце XVIII в. инициатором индустриальной революции была Великобритания. В начале XX в. ведущей экономической силой стала Германия. Правда, это не пошло на пользу людям, а привело к двум мировым войнам по переделу сфер экономического влияния. Затем ведущая роль перешла к США. Здесь также не обошлось без войн. Это продолжение войны в Афганистане, войны в Корее и во Вьетнаме, в бывшей Югославии, в Ираке. Во второй половине XX в. ведущая роль в развитии стала переходить к Японии, которая заняла сильную позицию в сталелитейной, кораблестроительной и автомобильной промышленности. Большое внимание в Японии уделяется научно-исследовательским работам. Объем этих работ составляет более 20% от мировых. Причем большое внимание уделяется новым секторам, а именно биотехнологии, микроэлектронике, информатизации и др. Большой прорыв Японии состоит в сокращении издержек в производстве продукции, в частности, за счет повышения производительности труда и сокращения материалоемкости и энергоемкости изделий. Качество продукции в Японии оценивает потребитель, и только та продукция считается качественной, которой потребитель удовлетворен.

В разных странах наблюдаются свои циклы Кондратьева. На рис. 9.3 представлены минимумы и максимумы экономических циклов в мире, в России и в США.

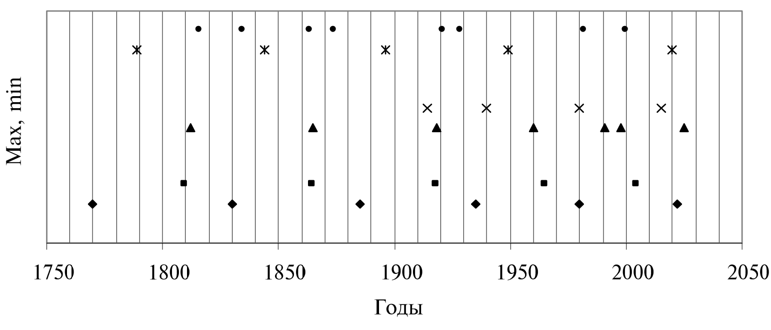


Рис. 9.3. **Мировые, российские и американские циклы Кондратьева:**

минимумы циклов Кондратьева: ◆ — мировых; ▲ — российских; ⁎ — американских;
максимумы циклов Кондратьева: ■ — мировых; × — российских; • — американских

1. Начало первого технологического уклада в России относится к началу XIX в. и приурочено к 1812 г. В условиях крепостничества развитие этого уклада происходило существенно медленнее, чем в Великобритании, Франции и Бельгии. В это время в России существенно недоставало свободной рабочей силы, инженерно-технических кадров, капиталов, транспортных коммуникаций.

В России так же, как и в других европейских странах, промышленный переворот захватил в первую очередь текстильную промышленность. По данным [2], в России к 1861 г. имелось около 2 млн механических прядильных веретен и около 15 тыс. механических ткацких станков, на которых вырабатывалось около 20% всех бумажных тканей. В полотняной промышленности на механических фабриках с паровыми и водяными двигателями вырабатывалось около 50% всей продукции, а в суконном производстве на фабриках изготавливалось 63% всей продукции. Все это содействовало расширению внутреннего и внешнего рынков. Развитие торговли стимулировало расширение водных путей и сухопутных дорог.

Первая фаза этого технологического уклада в России продолжалась около 50 лет, а в Великобритании около 25—30 лет. Это говорит о медленном развитии экономики в России во время первого технологического уклада по указанным выше причинам.

После реформ Александра II элементы первого технологического уклада развивались более высокими темпами. За 10 лет продукция текстильной и бумагопрядильной промышленности возросла в 2 раза.

2. Наряду с расширением первого технологического уклада в России в это же время началось становление второго технологического уклада, основанного на паровых движителях и электротехнике. Развивается сталелитейная промышленность, электроэнергетика, тяжелое машиностроение, неорганическая химия. Но соответствующая материально-техническая база для их роста к тому времени еще не была создана. Поэтому в формировании технологий второго технологического уклада правительство с самого начала вынуждено было опираться на импорт технологий, включая привлечение в Россию иностранных специалистов. За 10—15 лет, начиная с 1860 г., происходит становление металлургии на основе импорта технологий с широким привлечением иностранного капитала и оборудования. За это время производство чугуна возросло на 30%, железа — на 40% [2]. На рубеже

XIX и XX вв. Россия достигла больших успехов в создании паровых движителей, в выпуске металлургической продукции. Темпы роста в металлургии превышали темпы роста, достигнутые в соответствующий период в Великобритании. Большие успехи были получены также в электротехнической промышленности, неорганической химии, электроэнергетике, в производстве и потреблении угля.

3. В начале XX в., когда в развитых странах второй технологический уклад был замещен третьим, в России экономика в значительной степени базировалась на расширении производств второго технологического уклада. Вместе с тем в развитии российской промышленности появились элементы третьего технологического уклада, ключевыми факторами которого являлись электродвигатели и сталь, а формирующим ядром — автомобилестроение, органическая химия, производство и переработка нефти, цветная металлургия, автодорожное строительство. В России в это время наблюдалось быстрое развитие электротехнической промышленности, неорганической химии, электроэнергетики. Высокими темпами росло производство и потребление угля. В то же время машиностроение в России оставалось недостаточно развитым. Оно удовлетворяло потребности экономики страны приблизительно на 2/3 [2], а 1/3 гражданского спроса в машинах, оборудовании, аппаратах и приборах удовлетворялась поставками из-за границы.

Первая мировая война и Гражданская война приостановили технико-экономическое развитие России. После восстановления народного хозяйства технико-экономическое развитие страны было направлено на расширенное воспроизводство второго и третьего технологических укладов.

4. Технологии четвертого технологического уклада зарождались еще до революции. В конце XIX в. русским физиком и электротехником А.С. Поповым было изобретено радио. Перед Великой Отечественной войной были сделаны первые попытки создания радаров. Функционировала автомобильная и авиационная промышленность. Развивались нефтепереработка и химическая промышленность.

К концу Великой Отечественной войны в России сложились благоприятные условия для развития четвертого технологического уклада на основе военно-промышленного комплекса, функционирующего на передовых технологиях. Страна обеспечила экономику и науку своими специалистами. Был построен университет на Ленинских горах. Однако большие ресурсы использовались для создания военной техники. Были созданы атомная и водородная бомбы. Наряду с военными затратами создавались и новые технологии для мирных целей (например, велись работы по созданию атомных электростанций).

Однако восстановленный после войны производственно-технический комплекс во многом воспроизводил элементы третьего технологического уклада. В это же время в развитых капиталистических странах шло интенсивное формирование четвертого технологического уклада, что и стало основой их экономического роста. Поэтому технологическое отставание России по сравнению с лидирующими странами увеличилось.

Начало четвертого технологического уклада в России можно отнести к 1960 г. Этот уклад характеризуется развитой авиационной и радиотехнической промышленностью, производством и переработкой газа, строительством трубопроводов. Еще в 1950-х гг. в стране были созданы научно-исследовательские институты и производства по разработке и строительству радиолокационных станций. Созданные во время четвертого технологического уклада основные элементы радиолокаторов используются до сих пор и считаются лучшими в мире. Началось освоение космоса. В СССР был запущен первый искусственный спутник Земли, а в 1961 г. впервые в истории человечества совершил полет в космос на космическом корабле «Восток» Ю.А. Гагарин. Однако во время этого уклада разработке и производству товаров широкого потребления уделялось слишком мало внимания.

5. Элементы пятого технологического уклада в России начали проявляться в четвертом укладе. Сюда относится начало развития микроэлектроники, биотехнологий, космической техники и тонкой химии. Однако развитие четвертого технологического уклада в России прервалось во время политического и экономического кризиса 1991 г. В начале 1990-х гг. экономика в России практически перестала функционировать. В это время государство за основу своей экономической политики приняло разработанную в Чикагском университете под руководством М. Фридмена количественную теорию денег, называемую *монетаризм*. Эта теория выступает за государственный контроль над предложением денег в длительной перспективе. Это, по мнению сторонников школы монетаризма, позволяет потребителям принимать экономические решения при минимальном вмешательстве государства. При этом реальный сектор экономики развивается так, чтобы автоматически удовлетворять требования потребителей. Такой подход является справедливым в отлаженных временем и людьми экономиках в определенные периоды времени.

В России в момент полного развала старых экономических отношений автоматического приспособления реальной экономики к количественной теории денег М. Фридмена не произошло. Эта политика государства привела к резкому росту цен, т.е. к инфляции. С одной стороны, товаров не хватало, т.е. имела место инфляция спроса, с другой стороны — цены настолько быстро росли, что у потребителей не хватало денег на покупку товаров, т.е. имела место затратная инфляция. Цены с 1991 г. до середины первого десятилетия XXI в. выросли в 50 тыс. раз. Произошел огромный разрыв между доходами богатых и бедных людей. Интеллектуальные профессии практически не были востребованы.

Начиная с середины 1990-х гг. в экономике России наметился некоторый подъем. Однако бóльшая часть достижений была потеряна в период августовского кризиса 1998 г. Семилетний период (1991—1998) является среднесрочным циклом. Однако причиной кризиса 1998 г. является не обновление поколений техники или технологий, а необходимость в обновлении государственной экономической политики.

Таким образом, четвертый экономический цикл в России прервался и все достижения в микроэлектронике, биотехнологии, космической технике и тонкой химии были во многом потеряны.

В начале XXI в. в экономической политике государства произошли перемены. В частности, было намечено развивать нанотехнологии, т.е. технологии небольших величин, применяющиеся для работы, например, с элементами микроэлектроники, размеры которых составляют миллиардные доли метра, а скорость обработки информации — миллиарды бит в секунду. Считается, что именно эти технологии будут основой пятого технологического уклада.

Конечно, нанотехнологии являются перспективным направлением как естественное развитие сегодняшней микроэлектроники. Но необходимо помнить, что в любой день могут появиться новые идеи, которые и станут основой нового технологического уклада. Поэтому Правительству РФ совместно, скажем, с Академией наук России и другими научными учреждениями следует организовать контроль научных достижений и внедрять наиболее перспективные из них в практическую деятельность. Этому вопросу следует уделять первостепенное внимание. Например, венчурному финансированию инновационных проектов, направленных на развитие и внедрение в практику научных идей, во всех развитых странах уделяется большое внимание. В США в конце 1990-х гг. венчурное финансирование составляло 100 млрд долл.

Из сказанного можно сделать следующий вывод. Россия по воле случая в середине четвертого технологического уклада оказалась в глубоком кризисе. Дальнейшие попытки экономического развития базировались на элементах этого уклада. Кризис продолжался около 10 лет. В начале XXI в. намечается некоторый подъем экономики, который базируется, в основном, на развитии нефтедобычи, строительстве и эксплуатации трубопроводов для транспортировки нефти и газа. Если последовательному выполнению сегодняшней правительственной экономической политики не помешают коррупция и непоследовательность деятельности правительственных чиновников, то у России существует возможность в ближайшие годы плавно перейти из четвертого технологического уклада в пятый.

Рассмотрим развитие американских долгосрочных циклов. Минимумы и максимумы американских циклов представлены на рис. 9.3 сверху [8]. По сравнению с мировыми циклами американские наступили примерно на 19 лет позже. Четвертый (последний) цикл начался примерно в 1950 г. и длится до сих пор. Спад, по данным [8], начался только в 2000 г. Четвертый американский цикл включил в себя четвертый и пятый мировые циклы. Предполагается, что он закончится немного раньше, чем пятый мировой цикл.

9.5. Среднесрочные циклы

Прежде всего экономисты выделили из всего набора циклов среднесрочные циклы длительностью 7—12 лет. Эти циклы связывают с периодическим обновлением основного капитала. Среднесрочные циклы, как правило, заканчиваются кризисами. Известны следующие кризисы [2]:

1825 г. — первый кризис в Великобритании;
1836 г. — кризис возник в Великобритании, а затем распространился на США;
1847—1848 гг. — первый мировой кризис;
1857 г. — кризис;
1866 г. — кризис;
1873 г. — глубокий кризис;
1882 г. — кризис;
1890 г. — кризис;
1900 г. — кризис;
1907 г. — кризис;
1920—1921 гг. — кризис;
1929—1933 гг. — Великая депрессия;
1937—1938 гг. — кризис;
1948—1949 гг. — кризис;
1953—1954 гг. — кризис;
1957—1958 гг. — кризис;
1960—1961 гг. — кризис;
1969—1970 гг. — кризис;
1973—1974 гг. — разрушительный кризис;
1981—1982 гг. — кризис.

Одним из первых экономистов, который уделял среднесрочным циклам и кризисам самое пристальное внимание, был К. Маркс. Кризис проявляется, прежде всего, в перенасыщении рынка товарами, в повышении процентной ставки и в сокращении кредита. Следствием этого является падение производства, банкротство предприятий и банков, понижение прибылей.

9.6. Теории экономических циклов

В настоящее время отсутствует единая теория экономических циклов. Экономисты по-разному объясняют причины циклического развития экономики.

В общем случае используются три типа факторов, определяющих экономические циклы: экзогенные, эндогенные, совместные.

Экзогенные, или внешние, факторы находятся за пределами экономической системы, подверженной циклическому развитию. Например, возникновение циклов, имеющих длительность 10—12 лет, некоторые исследователи связывают с солнечной активностью. Как известно, периодичность солнечной активности, выражающаяся появлением солнечных пятен, равна 11 годам. Солнечные пятна, по мнению этих исследователей, влияют на поведение людей, что и приводит к цикличности развития экономики. К экзогенным факторам относят также динамику роста и миграцию населения, научные открытия, политику государства и войны.

Эндогенные, или внутренние, факторы, присущи экономической системе. К внутренним факторам относят потребление и инвестиции.

Деление факторов на внутренние и внешние не всегда можно провести с достаточной четкостью. Является ли рассматриваемый фактор внешним или внутренним во многом зависит от того, что исследователь включает в экономическую систему, а что исключает из нее. Например, если государство рассматривать как элемент экономики, то его налогово-бюджетная политика является внутренним фактором. Если государство отделить от экономики, то эта политика будет внешним фактором. Поэтому многие исследователи не делят факторы на внутренние и внешние, а используют в своих работах третий тип, называемый *совместным*.

9.6.1. Модель Самуэльсона—Хикса

Модель Самуэльсона—Хикса включает в себя рынок товаров. Уровень цен и процентная ставка принимаются постоянными.

Если не учитывать чистый экспорт, то основное макроэкономическое тождество **(6.2)** для года под номером t можно записать в виде:

$$Y_t = C_t + I_t + G_t,$$

где $C_t = a_t + bY_{t-1}$ — функция потребления для года под номером t, a_t — автономное потребление для года под номером t, b — предельная склонность к потреблению (не зависит от времени); $I_t = I_{a,t} + I_{u,t}$ — спрос на инвестиции для года под номером t, $I_{a,t}$ — автономные инвестиции, объем которых для данной процентной ставки постоянен, $I_{u,t}$ — индуцированные инвестиции, зависящие от приращения дохода за прошлый и позапрошлый годы; G_t — государственные расходы для года под номером t.

Индуцированные инвестиции вычисляются по формуле

$$I_{u,t} = V\left(Y_{t-1} - Y_{t-2}\right),$$

где V — акселератор.

Подставив в основное макроэкономическое тождество приведенные соотношения, получим

$$Y_t = a_t + bY_{t-1} + I_{a,t} + V\left(Y_{t-1} - Y_{t-2}\right) + G_t = \left(b + V\right)Y_{t-1} - VY_{t-2} + a_t + I_{a,t} + G_t.$$

Перепишем эту формулу в виде:

$$Y_t = \left(b + V\right)Y_{t-1} - VY_{t-2} + A_t, \qquad \textbf{(9.1)}$$

где $A_t = a_t + I_{a,t} + G_t$.

Соотношение **(9.1)** называется *неоднородным* конечно-разностным линейным уравнением с постоянными коэффициентами второго порядка.

Уравнение вида

$$Y_t = \left(b + V\right)Y_{t-1} - VY_{t-2} \qquad \textbf{(9.2)}$$

называется *однородным* конечно-разностным линейным уравнением с постоянными коэффициентами второго порядка.

Решение уравнения **(9.1)** определяется однозначно, если заданы два начальных условия. В качестве этих условий рассматриваются, например, значения Y_t при $t = 0$ и $t = 1$.

Если в уравнении **(9.1)** воздействие $A_t = A = \text{const}$, то говорят, что система находится на стационарной траектории. На этой траектории выход год от года изменяться не будет, т.е. $Y_t = \overline{Y} = \text{const}$ при любом t. Из уравнения **(9.1)** при выполнении этого условия следует:

$$\overline{Y} = (b+V)\overline{Y} - V\overline{Y} + A.$$

Отсюда можно найти формулу для расчета величины выхода на стационарной траектории:

$$\overline{Y} = \frac{A}{1-b}.$$

Рассмотрим уравнение **(9.1)** при выполнении условия $A_t = A = \text{const}$, т.е. правая часть уравнения не зависит от времени. Тогда это уравнение можно переписать в виде:

$$Y_t = (b+V)Y_{t-1} - VY_{t-2} + A. \qquad \textbf{(9.3)}$$

Введем замену:

$$y = Y - \overline{Y} = Y - \frac{A}{1-b}. \qquad \textbf{(9.4)}$$

Тогда уравнение **(9.3)** можно записать следующим образом:

$$y_t + \frac{A}{1-b} = (b+V)\left(y_{t-1} + \frac{A}{1-b}\right) - V\left(y_{t-2} + \frac{A}{1-b}\right) + A.$$

Преобразовав это выражение, получим

$$y_t = (b+V)y_{t-1} - Vy_{t-2}. \qquad \textbf{(9.5)}$$

Таким образом, введя замену **(9.4)**, мы пришли к однородному уравнению. Поэтому все рассмотренные ниже свойства уравнения **(9.5)** справедливы и для уравнения **(9.3)**. Характеристическое уравнение однородного конечно-разностного линейного уравнения с постоянными коэффициентами **(9.5)** имеет вид:

$$\lambda^2 - (b+V)\lambda + V = 0.$$

Корни этого уравнения вычисляются по формуле

$$\lambda_{1,2} = \frac{b+V \pm \sqrt{(b+V)^2 - 4V}}{2}.$$

Вид решения уравнения **(9.5)** зависит от типа корней. Если корни действительны и различны, то решение уравнения имеет вид:

$$y_t = c_1\lambda_1^t + c_2\lambda_2^t. \quad \textbf{(9.6)}$$

Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, то решение имеет вид:

$$y_t = (c_1 + c_2 t)\lambda^t. \quad \textbf{(9.7)}$$

Если $(b+V)^2 - 4V < 0$, т.е. если корни — комплексные числа и имеют вид:

$$\lambda_{1,2} = \frac{b+V \pm \sqrt{(b+V)^2 - 4V}}{2} = \alpha \pm i\beta = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}e^{\pm i\cdot \operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha}} = \rho e^{\pm i\cdot\omega},$$

то решение можно получить, подставив значение корней в **(9.6)**.

В результате найдем

$$y_t = c_1\rho^t e^{i\cdot\omega\cdot t} + c_2\rho^t e^{-i\cdot\omega\cdot t} = c_1\rho^t\left(\cos\omega\cdot t + i\sin\omega\cdot t\right) +$$
$$+ c_2\rho^t\left(\cos\omega\cdot t - i\sin\omega\cdot t\right) = (c_1+c_2)\rho^t\cos\omega\cdot t + i(c_1-c_2)\rho^t\sin\omega\cdot t,$$

где ρ — модуль комплексного числа.

Таким образом, решение можно записать в виде:

$$y_t = \rho^t\left(B\cdot\cos\omega\cdot t + D\cdot\sin\omega\cdot t\right), \quad \textbf{(9.8)}$$

где B и D — действительные числа, значение которых находят из начальных условий.

Пусть в качестве начальных условий заданы значения y_0 при $t=0$ и y_1 при $t=1$. Тогда, подставив в **(9.8)** $t=0$, получим $B = y_0$. Подставив туда $t=1$, найдем

$$y_1 = \rho\left(y_0\cdot\cos\omega + D\cdot\sin\omega\right).$$

Отсюда находим:

$$D = \frac{y_1/\rho - y_0\cdot\cos\omega}{\sin\omega}.$$

В правую часть этого соотношения входят только действительные значения.

Как следует из соотношений **(9.6)—(9.8)**, поведение экономики зависит от вида траектории. Рассмотрим это подробно.

Напомним, что решение называется *устойчивым*, если при стремлении времени к бесконечности, т.е. $t\to\infty$, решение стремится к нулю, т.е. $y_t \to 0$. Если же при $t \to \infty$ решение $y_t \to \infty$, то такое решение называется *неустойчивым*.

Выход, определяемый уравнением **(9.6)** задается суммой двух показательных функций. Траектории, определяемые этими функциями, зависят от значения корней λ_1 и λ_2. Если эти корни находятся в интервале от нуля до единицы, то траектория будет устойчивой. Действительно, при $0 \le \lambda_1 < 1$ и при $0 \le \lambda_2 < 1$ имеем:

$$\lim_{t\to\infty} y_t = c_1 \lim_{t\to\infty} \lambda_1^t + c_2 \lim_{t\to\infty} \lambda_2^t = 0.$$

Реальный выход при $t \to \infty$ можно найти, используя замену **(9.4)**:

$$\lim_{t\to\infty} Y_t = \lim_{t\to\infty} \left(y_t + \overline{Y} \right) = \overline{Y}.$$

Отсюда следует, что система выходит на стационарную траекторию теоретически при $t \to \infty$. Практически считают, что система вышла на стационарную траекторию при значениях Y_t, отличающихся от $\overline{Y}$ на несколько процентов.

Устойчивость рассматриваемого решения выражают также через предельную склонность к потреблению b и акселератор V. В этом случае должны выполняться неравенства

$$0 \le \frac{b+V \pm \sqrt{\left(b+V\right)^2 - 4V}}{2} < 1.$$

Из этого соотношения следует, что если выполняется неравенство с плюсом перед корнем, то тем более выполняется неравенство с минусом перед корнем. Поэтому условие устойчивости можно выразить через одно неравенство:

$$0 \le \frac{b+V+\sqrt{\left(b+V\right)^2 - 4V}}{2} < 1 \quad \text{или} \quad 0 \le b+V+\sqrt{\left(b+V\right)^2 - 4V} < 2.$$

Если хотя бы один корень больше единицы, то траектория будет неустойчивой. По условиям рассматриваемой задачи, первый корень всегда больше второго, т.е. $\lambda_1 > \lambda_2$. При $\lambda_1 > 1$ имеем:

$$\lim_{t\to\infty} y_t = c_1 \lim_{t\to\infty} \lambda_1^t + c_2 \lim_{t\to\infty} \lambda_2^t \to \infty.$$

Если условие неустойчивого равновесия выражают через предельную склонность к потреблению b и акселератор V, то оно имеет вид:

$$b+V+\sqrt{(b+V)^2-4V}>2.$$

Графически устойчивые и неустойчивые траектории представлены на рис. 9.4.

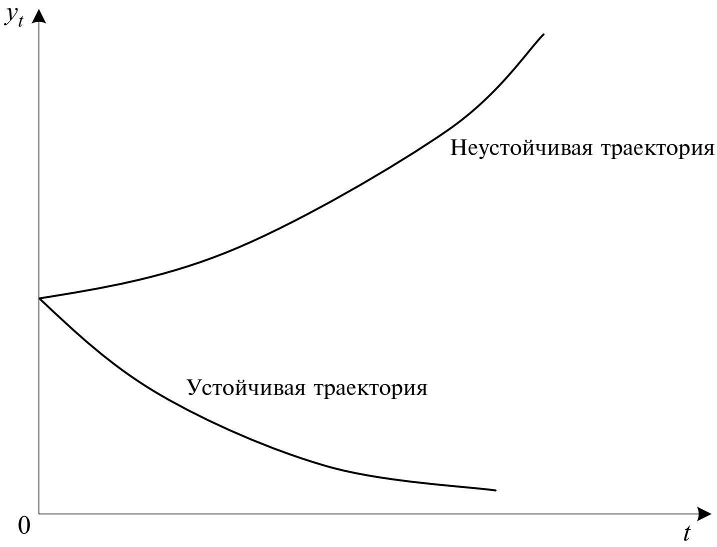


Рис. 9.4. **Устойчивая и неустойчивая траектории**

Выход, определяемый уравнением **(9.7)**, задается одной из показательных функций и одной степенной. Если корень λ находится в интервале от нуля до единицы, то траектория будет устойчивой. Действительно, при $0 \le \lambda < 1$ имеем:

$$\lim_{t\to\infty} y_t = c_1 \lim_{t\to\infty} \lambda^t + c_2 \lim_{t\to\infty} t\lambda^t = 0.$$

Второй предел в правой части легко найти при помощи правила Лапиталя.

Условие устойчивости, выраженное через предельную склонность к потреблению b и акселератор V, имеет вид:

$$0 \le \frac{b+V}{2} < 1 \quad \text{или} \quad 0 \le b+V < 2.$$

Если корень λ больше единицы, то траектория будет устойчивой.

Графически устойчивые и неустойчивые траектории для второго случая представлены на рис. 9.5.

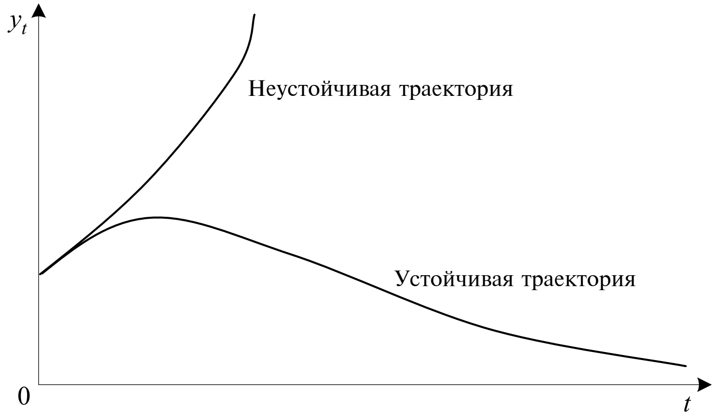


Рис. 9.5. **Устойчивая и неустойчивая траектории**

Наконец, рассмотрим третий случай колебательной траектории, представленной уравнением **(9.8)**. Как следует из этого уравнения, траектория будет устойчивой при $0 < \rho < 1$ и неустойчивой при $\rho > 1$. Условие устойчивости, выраженное через предельную склонность к потреблению b и акселератор V, можно записать в виде:

$$0 < \sqrt{\frac{(b+V)^2}{4} + \frac{(b+V)^2 - 4V}{4}} < 1 \quad \text{или} \quad 0 < \sqrt{2(b+V)^2 - 4V} < 2.$$

На рис. 9.6 представлена устойчивая траектория колебательного процесса для функции y_t.

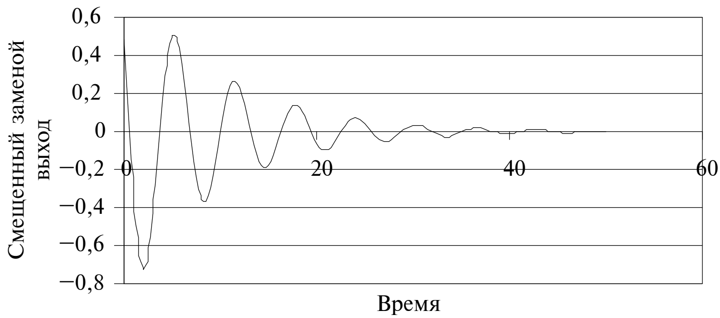


Рис. 9.6. **Устойчивая траектория**

Если в качестве выхода принять реальные значения $Y_t = y_t + \overline{Y}$, то график устойчивой траектории будет иметь вид, показанный на рис. 9.7.

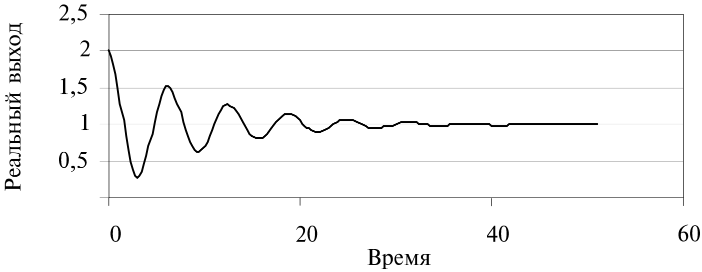


Рис. 9.7. **Устойчивая траектория для реального процесса**

На рис. 9.8 представлена неустойчивая траектория колебательного процесса для функции y_t.

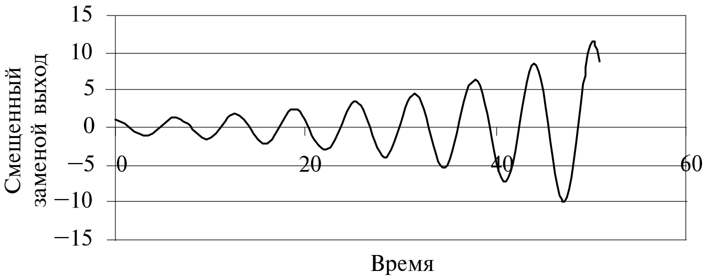


Рис. 9.8. **Неустойчивая траектория**

▷ **Пример 9.1.** Функция потребления домашних хозяйств имеет вид: $C_t = 100 + 0,76 \cdot Y_{t-1}$, а функция спроса на инвестиции — $I_t = 500 + V\left(Y_{t-1} - Y_{t-2}\right)$.

Построить траектории при следующих значениях акселератора: $V_1 = 0,2$, $V_2 = 0,8$, $V_3 = 1,5$, $V_4 = 2,5$ при граничных условиях $Y_0 = 1000$, $Y_1 = 1200$.

Р е ш е н и е. Правая часть уравнения **(9.3)** равна $A = 100 + 500 = 600$. Величина выхода на стационарной траектории определяется по формуле $\overline{Y} = \dfrac{A}{1-b} = \dfrac{600}{1-0,76} = 2500$. С учетом замены **(9.4)** конечно-разностное уравнение принимает вид: $y_t = \left(0,76 + V\right) y_{t-1} - V y_{t-2}$. Рассмотрим разные варианты.

Вариант 1. $V_1 = 0,2$. Перепишем конечно-разностное уравнение

$$y_t = \left(0,76 + 0,2\right) y_{t-1} - 0,2 y_{t-2}.$$

Корни уравнения равны

$$\lambda_{1,2} = \frac{0,76 + 0,2 \pm \sqrt{\left(0,76 + 0,2\right)^2 - 4 \cdot 0,2}}{2} = \frac{0,96 \pm 0,35}{2},$$

$$\lambda_1 = 0,655, \ \lambda_2 = 0,305.$$

Система устойчива, так как корни меньше единицы. Решение имеет вид:

$$y_t = c_1 \cdot 0,655^t + c_2 \cdot 0,305^t.$$

Используя замену **(9.4)**, получим уравнение для истинного выхода:

$$Y_t = c_1 \cdot 0,655^t + c_2 \cdot 0,305^t + 2500.$$

Постоянные c_1 и c_2 находят из граничных условий. По условиям примера $Y_0 = 1000$, а $Y_1 = 1200$. Подставив эти данные в уравнение для истинного выхода, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 1000 = c_1 + c_2 + 2500, \\ 1200 = c_1 \cdot 0,655 + c_2 \cdot 0,305 + 2500. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим

$$c_1 = -\frac{842,5}{0,35} = -2407, \ c_2 = 907.$$

Истинная траектория имеет вид:

$$Y_t = -2407 \cdot 0,655^t + 907 \cdot 0,305^t + 2500.$$

График этой траектории представлен на рис. 9.9.

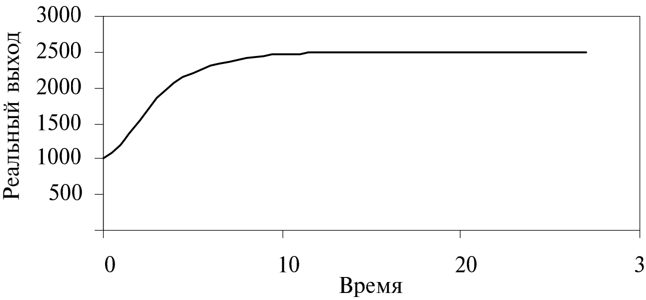


Рис. 9.9. **Устойчивая траектория**

Вариант 2. $V_1 = 0,8$. Перепишем конечно-разностное уравнение:

$$y_t = \left(0,76 + 0,8\right) y_{t-1} - 0,8 y_{t-2}.$$

Корни уравнения равны

$$\lambda_{1,2} = \frac{0,76 + 0,8 \pm \sqrt{\left(0,76 + 0,8\right)^2 - 4 \cdot 0,8}}{2} =$$

$$= \frac{1,56 \pm \sqrt{2,4336 - 3,2}}{2} = 0,78 \pm 0,438 \cdot i.$$

Выразим корни через экспоненту:

$$\lambda_{1,2} = \sqrt{0,78^2 + 0,438^2} e^{\pm i \cdot \mathrm{arctg} \frac{0,438}{0,78}} = 0,89 e^{\pm i \cdot 0,51}.$$

Решение **(9.8)** можно записать в виде:

$$y_t = 0,89^t \left(B \cdot \cos\left(0,51 \cdot t\right) + D \cdot \sin\left(0,51 \cdot t\right)\right).$$

Используя замену **(9.4)**, получим уравнение для истинного выхода:

$$Y_t = 0,89^t \left(B \cdot \cos\left(0,51 \cdot t\right) + D \cdot \sin\left(0,51 \cdot t\right)\right) + 2500.$$

B и D находят из начальных условий $Y_0 = 1000$, $Y_1 = 1200$. Подставив в полученное уравнение $t = 0$, получим $1000 = B + 2500$, или $B = -1500$. Подставив в уравнение $t = 1$, найдем:

$$1200 = 0,89\left(-1500 \cdot \cos 0,51 + D \cdot \sin 0,51\right) + 2500 .$$

Отсюда находим

$$D = \frac{\dfrac{1200 - 2500}{0,89} + 1500 \cos 0,51}{\sin 0,51} = -310 .$$

Таким образом, уравнение для истинного выхода имеет вид:

$$Y_t = 0,89^t \left(-1500 \cdot \cos\left(0,51 \cdot t\right) - 310 \cdot \sin\left(0,51 \cdot t\right)\right) + 2500.$$

График этой функции представлен на рис. 9.10.

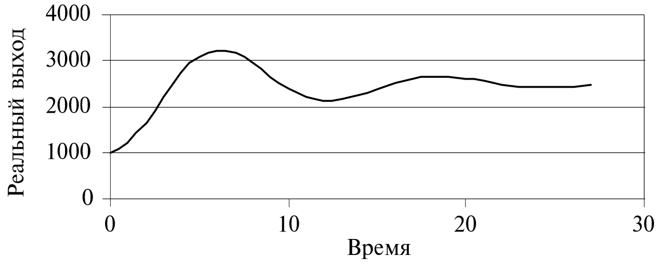


Рис. 9.10. **Устойчивая колебательная траектория**

Вариант 3. $V_1 = 1,5$. Конечно-разностное уравнение имеет вид:

$$y_t = \left(0,76 + 1,5\right) y_{t-1} - 1,5 y_{t-2}.$$

Корни уравнения равны

$$\lambda_{1,2} = \frac{0,76 + 1,5 \pm \sqrt{\left(0,76+1,5\right)^2 - 4 \cdot 1,5}}{2} =$$

$$= \frac{2,26 \pm \sqrt{5,12 - 6}}{2} = 1,13 \pm 0,938 \cdot i.$$

Выразим корни через экспоненту:

$$\lambda_{1,2} = \sqrt{1,13^2 + 0,938^2} e^{\pm i \cdot \mathrm{arctg} \frac{0,938}{1,13}} = 1,47 e^{\pm i \cdot 0,69}.$$

Решение **(9.8)** имеет вид:

$$y_t = 1,47^t \left(B \cdot \cos\left(0,69 \cdot t\right) + D \cdot \sin\left(0,69 \cdot t\right)\right).$$

Используя замену **(9.4)**, получим уравнение для истинного выхода:

$$Y_t = 1,47^t \left(B \cdot \cos\left(0,69 \cdot t\right) + D \cdot \sin\left(0,69 \cdot t\right)\right) + 2500.$$

Система неустойчива, так как $\rho > 1$.

B и D находят из начальных условий $Y_0 = 1000$, $Y_1 = 1200$. Подставив в полученное уравнение $t = 0$, получим $1000 = B + 2500$, или $B = -1500$. Подставив в уравнение $t = 1$, найдем:

$$1200 = 1,47\left(-1500 \cdot \cos 0,69 + D \cdot \sin 0,69\right) + 2500.$$

Отсюда находим

$$D = \frac{\frac{1200-2500}{1,47} + 1500\cos 0,69}{\sin 0,69} = 428 .$$

Таким образом, уравнение для истинного выхода имеет вид:

$$Y_t = 1,47^t \left(-1500 \cdot \cos\left(0,69 \cdot t\right) + 428 \cdot \sin\left(0,69 \cdot t\right)\right) + 2500.$$

График этой функции представлен на рис. 9.11.

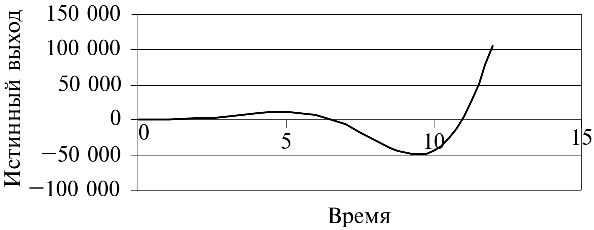


Рис. 9.12. **Неустойчивая колебательная траектория**

Вариант 4. $V_1 = 2,5$. Перепишем конечно-разностное уравнение:

$$y_t = \left(0,76 + 2,5\right) y_{t-1} - 2,5 y_{t-2}.$$

Корни уравнения равны

$$\lambda_{1,2} = \frac{0,76 + 2,5 \pm \sqrt{\left(0,76+2,5\right)^2 - 4 \cdot 2,5}}{2} = \frac{3,26 \pm 0,79}{2} ,$$

$$\lambda_1 = 4,05 , \ \lambda_2 = 2,47 .$$

Система неустойчива, так как корни больше единицы. Решение имеет вид:

$$y_t = c_1 \cdot 4,05^t + c_2 \cdot 2,47^t.$$

Используя замену **(9.4)**, получим уравнение для истинного выхода:

$$Y_t = c_1 \cdot 4,05^t + c_2 \cdot 2,47^t + 2500.$$

Постоянные c_1 и c_2 находят из граничных условий. По условиям примера $Y_0 = 1000$, а $Y_1 = 1200$. Подставив эти данные в уравнение для истинного выхода, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 1000 = c_1 + c_2 + 2500, \\ 1200 = c_1 \cdot 4,05 + c_2 \cdot 2,47 + 2500. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим:

$$c_1 = \frac{2405}{1,58} = 1522, \ c_2 = -3022.$$

Истинная траектория имеет вид:

$$Y_t = 1522 \cdot 4,05^t - 3022 \cdot 2,47^t + 2500.$$

График этой траектории представлен на рис. 9.12.

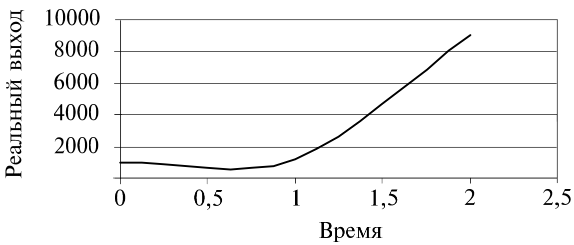


Рис. 9.12. **Неустойчивая траектория** ◄

Из приведенного примера следует, что при больших значениях акселератора экономическая система становится неустойчивой.

Таким образом, процесс будет колебательным при выполнении условия

$$(b+V)^2 - 4V < 0$$

и монотонным — при выполнении условия

$$(b+V)^2 - 4V \geq 0.$$

Граница между этими двумя процессами определяется уравнением

$$(b+V)^2 - 4V = 0 \quad \text{или} \quad b^2 + 2bV + V^2 - 4V = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$b = \frac{-2V \pm \sqrt{4V^2 - 4\left(V^2 - 4V\right)}}{2} = -V \pm 2\sqrt{V}.$$

Поскольку по условиям модели b является величиной положительной, а второй корень в решении не удовлетворяет этому условию, то его надо отбросить. В результате имеем

$$b = -V + 2\sqrt{V}. \tag{9.9}$$

Эта зависимость является границей между монотонной и колебательной траекториями. Графически эта граница представлена на рис. 9.13.

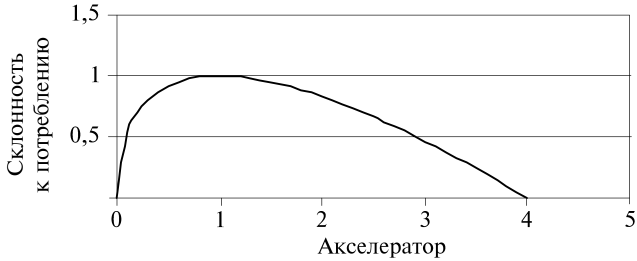


Рис. 9.13. **Граница между монотонной и колебательной траекториями**

Все сочетания b и V, которые лежат ниже кривой на рис. 9.13, приводят к колебательному процессу, а сочетания этих параметров, лежащих выше кривой, приводят к монотонному процессу.

Рассмотрим условия устойчивого и неустойчивого равновесия для колебательного процесса. Для этих целей запишем выражение для модуля комплексного числа:

$$\rho^2 = \left(\frac{b+V}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4V-(b+V)^2}}{2}\right)^2 = \frac{(b+V)^2-(b+V)^2+4V}{4} = V,$$

$$\rho = \sqrt{V}. \tag{9.10}$$

Отсюда следует, что $\rho = 1$ при $V = 1$. Из рис. 9.13 видно, что при $V = 1$ и при любых b имеет место колебательный процесс. Поэтому при $V < 1$ система устойчива, а при $V > 1$ система неустойчива.

Из сказанного следует, что если точка (V, b) располагается в прямоугольнике, ограниченном точками $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ и $(1,0)$, то система является устойчивой, причем для точек, расположенных выше кривой, система имеет монотонную траекторию, а для точек, расположенных ниже кривой, — колебательную траекторию. Если точка (V, b) располагается в прямоугольнике, ограниченном точками $(0,1)$, $(0,4)$, $(4,4)$ и $(1,1)$, то система является неустойчивой, причем для точек, расположенных выше кривой, система имеет монотонную траекторию, а для точек, расположенных ниже кривой, — колебательную траекторию.

В рассмотренном примере для акселератора, равного 1,5 и 2,5, выход за короткий период времени увеличивается многократно и в пределе стремится к бесконечности (рис. 9.11, 9.12). Если в любой модели выход стремится к бесконечности, то это означает, что не все показатели, действующие на систему, учтены. Это связано с тем, что обычно для простоты характеристики модели принимаются линейными, что и ведет к бесконечному увеличению некоторых параметров. Реальные характеристики системы, как правило, нелинейные. Это ограничивает бесконечный рост выхода, но усложняет анализ. Обычно исследователь принимает модель линейной, как в рассматриваемом случае, проводит ее анализ, а затем накладывает дополнительные условия, что и сделал английский экономист Дж. Хикс.

По Хиксу, существуют два ограничителя, которые препятствуют, с одной стороны, увеличению выхода, а с другой — его уменьшению. Верхним ограничителем является уровень полной занятости, а нижним — величина амортизационных отчислений. Выход, или доход, не может превысить доход полной занятости, что и ограничивает его рост сверху. С другой стороны, спрос на инвестиции для года под номером t, вычисляемый по формуле $I_t = I_{a,t} + V\left(Y_{t-1} - Y_{t-2}\right)$, может как увеличиваться, так и уменьшаться. Это зависит от знака разности $Y_{t-1} - Y_{t-2}$. Поскольку объем спроса на инвестиции не может быть ниже суммы амортизации, то это ограничивает траекторию дохода снизу. Хикс считал, что траектория изменяет свое направление всякий раз, как достигает верхней или нижней границы. Поэтому траектория носит колебательный характер. Приближенно траектория может быть описана гармонической функцией, как показано на рис. 9.14. Эта функция ограничена сверху и снизу.

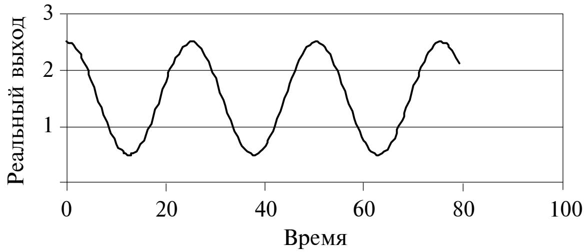


Рис. 9.14. **Колебательная траектория**

Рассмотрим влияние роста населения на поведение траектории выхода. Функция автономного спроса для года под номером t в этом случае будет иметь вид:

$$A_t = A(1+\eta)^t,$$

где η — ежегодный прирост автономного спроса.

С учетом этого уравнение **(9.1)** можно переписать в виде:

$$Y_t = (b+V)Y_{t-1} - VY_{t-2} + A(1+\eta)^t. \qquad \textbf{(9.11)}$$

В данном случае на стационарной траектории выход год от года будет увеличиваться с ежегодным темпом прироста η. Формула для ежегодного выхода на стационарной траектории имеет вид [6]:

$$\overline{Y} = \frac{A(1+\eta)^t}{1 - \frac{b+V}{1+\eta} + \frac{V}{(1+\eta)^2}}. \qquad \textbf{(9.12)}$$

Чтобы удостовериться в этом, надо **(9.12)** подставить в **(9.11)** и получить тождество.

Так же, как и ранее, введем замену $y = Y - \overline{Y}$. Тогда уравнение **(9.11)** приобретает вид:

$$y_t + \overline{Y} = (b+V)\left(y_{t-1} + \overline{Y}\right) - V\left(y_{t-2} + \overline{Y}\right) + A(1+\eta)^t.$$

Проведя преобразования, получим для новой переменной однородное уравнение

$$y_t = (b+V)\, y_{t-1} - Vy_{t-2}.$$

▷ **Пример 9.2.** Функция потребления домашних хозяйств имеет вид: $C_t = 100 + 0,76 \cdot Y_{t-1}$, а функция спроса на инвестиции — $I_t = 500 + 0,8\left(Y_{t-1} - Y_{t-2}\right)$. Автономный спрос ежегодно увеличивается на 2%.

Построить траекторию при следующих значениях граничных условий $Y_0 = 1000$, $Y_1 = 1200$.

Р е ш е н и е. Правая часть уравнения **(9.11)** равна:

$$A_t = \left(100 + 500\right)\left(1 + 0,02\right)^t = 600 \cdot 1,02^t .$$

Величина выхода на стационарной траектории определяется по формуле **(9.12)**:

$$\overline{Y} = \frac{600 \cdot 1,02^t}{1 - \frac{0,76 + 0,8}{1 + 0,02} + \frac{0,8}{\left(1 + 0,02\right)^2}} = 2505 \cdot 1,02^t .$$

Конечно-разностное уравнение принимает вид:

$$y_t = \left(0,76 + 0,8\right) y_{t-1} - 0,8 y_{t-2}.$$

Корни уравнения равны:

$$\lambda_{1,2} = \frac{0,76 + 0,8 \pm \sqrt{\left(0,76 + 0,8\right)^2 - 4 \cdot 0,8}}{2} =$$

$$= \frac{1,56 \pm \sqrt{2,4336 - 3,2}}{2} = 0,78 \pm 0,438 \cdot i.$$

Выразим корни через экспоненту:

$$\lambda_{1,2} = \sqrt{0,78^2 + 0,438^2}\, e^{\pm i \cdot \mathrm{arctg} \frac{0,438}{0,78}} = 0,89 e^{\pm i \cdot 0,51}.$$

Решение можно записать в виде:

$$y_t = 0,89^t \left(B \cdot \cos\left(0,51 \cdot t\right) + D \cdot \sin\left(0,51 \cdot t\right)\right).$$

Используя замену, получим уравнение:

$$Y_t = 0,89^t \left(B \cdot \cos\left(0,51 \cdot t\right) + D \cdot \sin\left(0,51 \cdot t\right)\right) + 2505 \cdot 1,02^t.$$

B и D находят из начальных условий $Y_0 = 1000$, $Y_1 = 1200$. Подставив в полученное уравнение $t = 0$, получим

$1000 = B + 2505$, или $B = -1505$. Подставив в уравнение $t = 1$, найдем:

$$1200 = 0,89\left(-1505 \cdot \cos 0,51 + D \cdot \sin 0,51\right) + 2505 \cdot 1,02 .$$

Отсюда находим

$$D = \frac{\dfrac{1200 - 2505 \cdot 1,02}{0,89} + 1505 \cos 0,51}{\sin 0,51} = -428 .$$

Таким образом, уравнение для истинного выхода имеет вид:

$$Y_t = 0,89^t\left(-1505 \cdot \cos\left(0,51 \cdot t\right) - 428 \cdot \sin\left(0,51 \cdot t\right)\right) + 2505 \cdot 1,02^t.$$

График этой функции представлен на рис. 9.15.

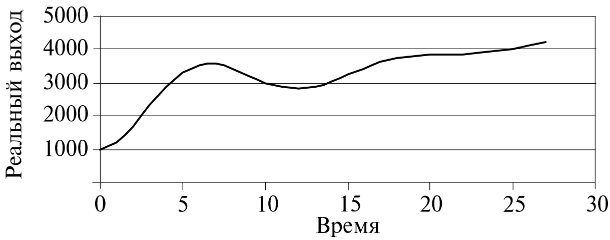


Рис. 9.16. **Траектория при росте населения** ◄

При работе в области неустойчивого равновесия на развитие выхода действуют два ограничителя Хикса, которые препятствуют увеличению и уменьшению выхода. Поэтому общая тенденция, или тренд, состоит в увеличении выпуска за счет роста населения, а относительно этого тренда происходят колебания, например, так, как показано на рис. 9.1.

9.6.2. Модель Тевеса

В модели Тевеса помимо показателей рынка товаров используются также показатели рынка денег, который воздействует на экономику через процентную ставку. Для того чтобы учесть это, из суммы автономных расходов A_t в соотношении **(9.1)** выделим автономные инвестиции $I_{a,t}$. Будем считать теперь, что величина автономных инвестиций зависит от процентной ставки предшествующего периода, т.е.

$$I_{a,t} = I_0 - dr_{t-1} ,$$

где d — коэффициент пропорциональности, характеризующий скорость изменения автономных инвестиций от процентной ставки.

Остальные показатели, как и прежде, не зависят от времени. В результате имеем:

$$A_t = a + G + I_0 - d \cdot r_{t-1} = A - d \cdot r_{t-1}.$$

Тогда уравнение **(9.1)** можно переписать в виде:

$$Y_t = \left(b + V\right) Y_{t-1} - VY_{t-2} + A - d \cdot r_{t-1}. \tag{9.13}$$

В гл. 8 было показано, что спрос на реальные кассовые остатки, при котором устанавливается равновесие, можно определить соотношением

$$\frac{M}{P} = k \cdot Y_{t-1} - h \cdot r_t \, ,$$

где M — заданное количество денег в экономике; P — уровень цен; k — коэффициент пропорциональности, характеризующий скорость изменения спроса на реальные кассовые остатки от объема выпуска; Y — объем выпуска в натуральном исчислении; h — коэффициент пропорциональности, характеризующий скорость изменения спроса на реальные кассовые остатки от процентной ставки; r — процентная ставка.

Отсюда можно найти:

$$r_t = \frac{k}{h} Y_{t-1} - \frac{M}{h \cdot P}.$$

Для периода под номером $t-1$ можно записать:

$$r_{t-1} = \frac{k}{h} Y_{t-2} - \frac{M}{h \cdot P}.$$

Подставив это в **(9.13)**, получим

$$Y_t = \left(b + V\right) Y_{t-1} - \left(V + U\right) Y_{t-2} + E \, , \tag{9.14}$$

где $U = \dfrac{d \cdot k}{h}$; $E = A + \dfrac{d \cdot M}{h \cdot P}$.

Уравнение **(9.14)** отличается от уравнения **(9.3)** только коэффициентом при Y_{t-2}. Поэтому подходы к анализу модели Тевеса ничем не отличаются от используемых выше подходов. В частности, для определения выхода на стационарной траектории положим $Y_t = \overline{Y} = \text{const}$ при любом t. В результате получим:

$$\overline{Y} = (b+V)\overline{Y} - (V+U)\overline{Y} + E.$$

Отсюда можно найти формулу для расчета величины выхода на стационарной траектории:

$$\overline{Y} = \frac{E}{1-b+U}.$$

Введем замену

$$y = Y - \overline{Y} = Y - \frac{E}{1-b+U}. \quad \textbf{(9.15)}$$

Подставив замену в выражение **(9.14)** и проведя необходимые преобразования, получим однородное уравнение

$$y_t = (b+V)\,y_{t-1} - (V+U)\,y_{t-2}. \quad \textbf{(9.16)}$$

Корни характеристического уравнения этого однородного конечно-разностного линейного уравнения с постоянными коэффициентами вычисляются по формуле

$$\lambda_{1,2} = \frac{b+V \pm \sqrt{(b+V)^2 - 4(V+U)}}{2}.$$

Вид решения этого уравнения зависит от типа корней. Решение определяется формулой **(9.6)** при действительных и различных корнях, формулой **(9.7)** при действительных и равных корнях и формулой **(9.8)**, если корнями являются комплексные числа.

Граница между колебательным и монотонным процессами определяется уравнением

$$(b+V)^2 - 4(V+U) = 0 \quad \text{или} \quad b^2 + 2bV + V^2 - 4(V+U) = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$b = \frac{-2V \pm \sqrt{4V^2 - 4\left(V^2 - 4(V+U)\right)}}{2} = -V \pm 2\sqrt{(V+U)}.$$

Поскольку по условиям модели b является величиной положительной, а второй корень в решении не удовлетворяет этому условию, то его надо отбросить. В результате имеем:

$$b = -V + 2\sqrt{(V+U)}.$$

Примем, например, скорость изменения автономных инвестиций от процентной ставки $d = 10$, скорость изменения спроса на реальные кассовые остатки от объема выпуска $k = 0{,}1$, скорость изменения спроса на реальные кассовые остатки от процентной ставки $h = 2$. Тогда $U = \frac{d \cdot k}{h} = \frac{10 \cdot 0{,}1}{2} = 0{,}5$. Тогда уравнение для границы между колебательным и монотонным процессами принимает вид:

$$b = -V + 2\sqrt{(V+0{,}5)}.$$

График этой функции представлен на рис. 9.16.

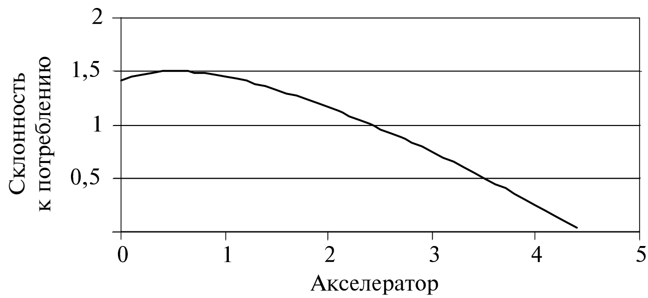


Рис. 9.16. **График b от V**

Из графика этого рисунка следует, что склонность к потреблению b при малых значениях акселератора V для показателя $U = 0{,}5$ превышает единицу. По экономическому смыслу эта величина не должна превышать единицу, поэтому граница между колебательной и монотонной траекториями будет проходить так, как показано на рис. 9.17.

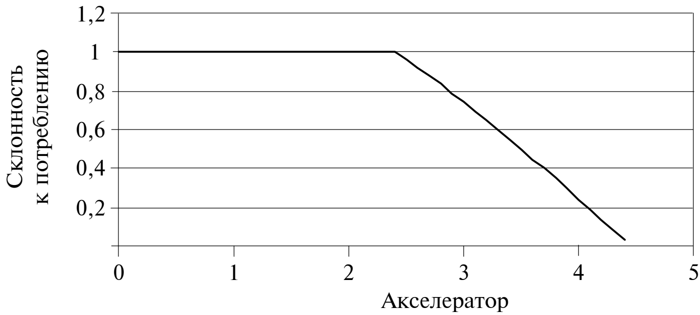


Рис. 9.18. **Граница между колебательной и монотонной траекториями**

Границы интервала, в котором склонность к потреблению принимается равной единице, определяют в общем случае из уравнения

$$1 = -V + 2\sqrt{(V+U)}.$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$V_{1,2} = 1 \mp 2\sqrt{U}.$$

Для рассматриваемого примера $V_2 = 1 + 2\sqrt{0,5} = 2,414$. Таким образом, при изменении акселератора V от 0 до 2,414 процесс будет колебательным, а от 2,414 до 4,4 будет колебательным, если координата b находится ниже кривой, и монотонной — если выше.

Условия устойчивого и неустойчивого равновесия так же, как и выше, определяются для колебательного процесса по модулю комплексного числа:

$$\rho^2 = \left(\frac{b+V}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4(V+U)-(b+V)^2}}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{(b+V)^2 - (b+V)^2 + 4(V+U)}{4} = V + U,$$

$$\rho = \sqrt{V+U}. \qquad \textbf{(9.17)}$$

Отсюда следует, что $\rho = 1$ при $V + U = 1$. Поэтому при $V + U < 1$ система устойчива, а при $V + U > 1$ система неустойчива.

▷ **Пример 9.3.** Функция потребления домашних хозяйств имеет вид: $C_t = 100 + 0,76 \cdot Y_{t-1}$, функция спроса на инвестиции — $I_t = 500 - 4r_{t-1} + 0,8\left(Y_{t-1} - Y_{t-2}\right)$, а функция спроса на реальные кассовые остатки — $\dfrac{M}{P} = 0,1 \cdot Y_{t-1} - 2 \cdot r_t$, причем $\dfrac{M}{P} = 140$. Построить траекторию при следующих значениях граничных условий $Y_0 = 1000$, $Y_1 = 1200$.

Р е ш е н и е. По условиям примера коэффициенты в уравнении **(9.14)** равны:

$$U = \frac{d \cdot k}{h} = \frac{4 \cdot 0,1}{2} = 0,2\ ,$$

$$b + V = 0,76 + 0,8 = 1,56\ ,$$

$$V + U = 0,8 + 0,2 = 1\ ,$$

$$E = a + I_0 + \frac{d \cdot M}{h \cdot P} = 100 + 500 + \frac{4 \cdot 140}{2} = 880.$$

Величина выхода на стационарной траектории определяется по формуле

$$\overline{Y} = \frac{E}{1 - b + U} = \frac{880}{1 - 0,76 + 0,2} = 2000\ .$$

Неоднородное конечно-разностное линейное уравнение с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$Y_t = 1,56 \cdot Y_{t-1} - Y_{t-2} + 880.$$

Введем замену:

$$y = Y - \overline{Y} = Y - 2000.$$

Подставим замену в неоднородное конечно-разностное уравнение:

$$y_t + 2000 = 1,56 \cdot \left(y_{t-1} + 2000\right) - y_{t-2} - 2000 + 880.$$

Конечно-разностное уравнение принимает вид:

$$y_t = 1,56 \cdot y_{t-1} - y_{t-2}.$$

Корни уравнения равны:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1,56 \pm \sqrt{1,56^2 - 4}}{2} = \frac{1,56 \pm \sqrt{2,4336 - 4}}{2} = 0,78 \pm 0,626 \cdot i.$$

Выразим корни через экспоненту:

$$\lambda_{1,2} = \sqrt{0,78^2 + 0,626^2}\, e^{\pm i\cdot \operatorname{arctg}\frac{0,626}{0,78}} = e^{\pm i\cdot 0,8}.$$

Решение можно записать в виде:

$$y_t = B\cdot\cos\left(0,8\cdot t\right) + D\cdot\sin\left(0,8\cdot t\right).$$

Используя замену, получим уравнение

$$Y_t = B\cdot\cos\left(0,8\cdot t\right) + D\cdot\sin\left(0,8\cdot t\right) + 2000.$$

B и D находят из начальных условий $Y_0 = 1000$, $Y_1 = 1200$. Подставив в полученное уравнение $t = 0$, получим $1000 = B + 2000$, или $B = -1000$. Подставив в уравнение $t = 1$, найдем:

$$1200 = -1000\cdot\cos 0,8 + D\cdot\sin 0,8 + 2000.$$

Отсюда находим:

$$D = \frac{1200 - 2000 + 1000\cos 0,8}{\sin 0,8} = -144.$$

Таким образом, траектория для реального выхода имеет вид:

$$Y_t = -1000\cdot\cos\left(0,8\cdot t\right) - 144\cdot\sin\left(0,8\cdot t\right) + 2000.$$

График этой функции представлен на рис. 9.18.

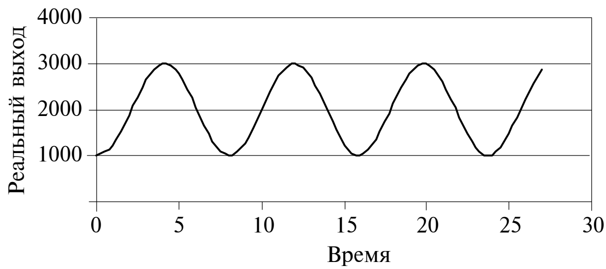


Рис. 9.18. Колебательная траектория выхода ◄

9.6.3. Модель Гудвина

Экономические циклы в модели Гудвина возникают вследствие изменения и перераспределения национального дохода между трудом и капиталом.

Доля национального дохода, получаемого работниками (доля труда в национальном доходе), в зависимости от времени t, измеряемого в годах, вычисляется по формуле [6]

$$\delta(t)=\frac{W(t)L(t)}{Y(t)}=\frac{W(t)}{q(t)}, \qquad \textbf{(9.17)}$$

где $W(t)$ — средняя реальная заработная плата одного работника (ставка реальной заработной платы); $L(t)$ — число занятых работников; $Y(t)$ — национальный доход; $q(t)=\dfrac{Y(t)}{L(t)}$ — средняя производительность труда.

Приращение доли труда в национальном доходе за интервал времени Δt выражается соотношением

$$\Delta\delta=\delta(t+\Delta t)-\delta(t)=\frac{W(t+\Delta t)}{q(t+\Delta t)}-\frac{W(t)}{q(t)}=$$
$$=\frac{W(t)}{q(t)}\left(\frac{W(t+\Delta t)}{q(t+\Delta t)}\cdot\frac{q(t)}{W(t)}-1\right).$$

Из этого соотношения найдем темп прироста доли труда в национальном доходе:

$$\frac{\Delta\delta}{\delta(t)}=\frac{W(t)+W'(t)\cdot\Delta t}{q(t)+q'(t)\cdot\Delta t}\cdot\frac{q(t)}{W(t)}-1=\frac{1+\dfrac{W'(t)}{W(t)}\Delta t}{1+\dfrac{q'(t)}{q(t)}\Delta t}-1=$$
$$=\frac{1+\dfrac{W'(t)}{W(t)}\Delta t-1-\dfrac{q'(t)}{q(t)}\Delta t}{1+\dfrac{q'(t)}{q(t)}\Delta t}=\frac{\dfrac{W'(t)}{W(t)}-\dfrac{q'(t)}{q(t)}}{1+\dfrac{q'(t)}{q(t)}\Delta t}\Delta t\approx\left(\frac{W'(t)}{W(t)}-\frac{q'(t)}{q(t)}\right)\Delta t,$$

где $W'(t)$ и $q(t)$ — производные от ставки реальной заработной платы и средней производительности труда по времени.

Из двух приведенных в скобках дробей рассмотрим отношение $\dfrac{q'(t)}{q(t)}$, которое запишем в виде:

$$\frac{q'(t)}{q(t)}=\frac{\Delta q(t)}{q(t)\cdot\Delta t}.$$

Если в этой формуле положить $\Delta t = 1$ году, а функцию $q(t)$ за этот срок можно представить в виде прямой линии, то можно считать:

$$\frac{q'(t)}{q(t)} = \frac{\Delta q(t)}{q(t)\cdot 1} = \alpha,$$

где α — годовой темп прироста производительности труда, причиной которого является технический прогресс.

Другая дробь также может быть представлена годовым темпом прироста ставки реальной заработной платы:

$$\frac{W'(t)}{W(t)} = \frac{\Delta W(t)}{W(t)}.$$

В общем случае годовой темп прироста ставки реальной заработной платы является функцией от показателя занятости, определяемого по формуле $\upsilon(t) = \frac{L(t)}{L^*(t)}$, где $L^*(t)$ — число занятых при нормальной загрузке производственных мощностей, когда объем предложения на рынке труда равен объему спроса. Если разложить функцию для годового темпа прироста ставки реальной заработной платы в ряд Тейлора и ограничиться линейным слагаемым, то эту функцию можно представить в виде:

$$\frac{W'(t)}{W(t)} = \frac{\Delta W(t)}{W(t)} = \rho\cdot\upsilon(t) - \gamma\ ,$$

где ρ и γ — постоянные коэффициенты.

Теперь темп прироста доли труда в национальном доходе можно записать в виде:

$$\frac{\Delta\delta}{\delta(t)} = \left(\rho\upsilon(t) - (\alpha+\gamma)\right)\Delta t. \qquad \textbf{(9.18)}$$

Приращение для показателя занятости запишем в виде:

$$\Delta\upsilon = \upsilon(t+\Delta t) - \upsilon(t) = \frac{L(t+\Delta t)}{L^*(t+\Delta t)} - \frac{L(t)}{L^*(t)} = \frac{L(t)}{L^*(t)}\left(\frac{L(t+\Delta t)}{L^*(t+\Delta t)}\cdot\frac{L^*(t)}{L(t)} - 1\right).$$

Отсюда найдем темп прироста показателя занятости:

$$\frac{\Delta\upsilon}{\upsilon(t)}=\frac{L(t)+L'(t)\cdot\Delta t}{L^*(t)+L^{*'}(t)\cdot\Delta t}\cdot\frac{L^*(t)}{L(t)}-1=\frac{1+\dfrac{L'(t)}{L(t)}\cdot\Delta t}{1+\dfrac{L^{*'}(t)}{L^*(t)}\cdot\Delta t}-1=$$

$$=\frac{1+\dfrac{L'(t)}{L(t)}\cdot\Delta t-1-\dfrac{L^{*'}(t)}{L^*(t)}\cdot\Delta t}{1+\dfrac{L^{*'}(t)}{L^*(t)}\cdot\Delta t}=\frac{\dfrac{L'(t)}{L(t)}\cdot\Delta t-\dfrac{L^{*'}(t)}{L^*(t)}\cdot\Delta t}{1+\dfrac{L^{*'}(t)}{L^*(t)}\cdot\Delta t}\approx\left(\frac{L'(t)}{L(t)}-\frac{L^{*'}(t)}{L^*(t)}\right)\cdot\Delta t.$$

Так же, как и прежде, темп прироста показателя занятости можно представить в виде:

$$\frac{\Delta\upsilon}{\upsilon(t)}=\left(\frac{\Delta L(t)}{L(t)}-\frac{\Delta L^*(t)}{L^*(t)}\right)\Delta t\ ,$$

где $\dfrac{\Delta L(t)}{L(t)}$ — годовой темп прироста числа занятых работников; $\dfrac{\Delta L^*(t)}{L^*(t)}=l$ — годовой темп прироста населения.

Из соотношения для средней производительности труда $q(t)=\dfrac{Y(t)}{L(t)}$ можно написать формулу

$$L(t)=\frac{Y(t)}{q(t)}.$$

Отсюда находим темп прироста числа занятых работников:

$$\frac{\Delta L}{L(t)}=\frac{\Delta Y(t)}{Y(t)}-\frac{\Delta q(t)}{q(t)}=\frac{\Delta Y(t)}{Y(t)}-\alpha\,.$$

Принимаем, что темп прироста национального дохода $\dfrac{\Delta Y(t)}{Y(t)}$ равен темпу прироста капитала $\dfrac{\Delta K(t)}{K(t)}$, а приращение капитала равно инвестициям, т.е. $\Delta K(t) = I(t)$. Таким образом, на инвестиции идет часть национального дохода, оставшаяся после выплат работникам. Поэтому инвестиции вычисляются по формуле

$$I(t) = \left(1 - \delta(t)\right) Y(t).$$

Используя эти данные, формулу для темпа прироста капитала можно записать в виде:

$$\frac{\Delta K(t)}{K(t)} = \frac{\left(1-\delta(t)\right)Y(t)}{K(t)} = \frac{1-\delta(t)}{K(t)/Y(t)} = \frac{1-\delta(t)}{\eta},$$

где $\eta = \dfrac{K}{Y}$ — капиталоемкость национального дохода.

Окончательно выражение для темпа прироста показателя занятости можно записать в виде:

$$\frac{\Delta \upsilon}{\upsilon(t)} = \left(\frac{\Delta Y(t)}{Y(t)} - \alpha - l\right)\Delta t = \left(\frac{\Delta K(t)}{K(t)} - (\alpha + l)\right)\Delta t = \\ = \left(\frac{1-\delta(t)}{\eta} - (\alpha + l)\right)\Delta t. \tag{9.19}$$

Соотношения **(9.18)** и **(9.19)** образуют модель Гудвина. Заменив в этих соотношениях приращения дифференциалами, получим систему дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\delta}{dt} &= \rho\upsilon(t)\delta(t) - (\alpha+\gamma)\delta(t), \\ \frac{d\upsilon}{dt} &= -\frac{\upsilon(t)\delta(t)}{\eta} + \left(\frac{1}{\eta} - \alpha - l\right)\upsilon(t). \end{aligned}\right\} \tag{9.20}$$

Такие системы дифференциальных уравнений решаются обычно приближенными цифровыми методами [3]. Для того чтобы представить вид исследуемых функций, рассмотрим пример.

▷ **Пример 9.4.** В экономике темп прироста производительности труда составляет $\alpha = \dfrac{\Delta q_t}{q_t} = 0,05$, капиталоемкость национального дохода $\eta = \frac{K}{Y} = 5$, темп прироста населения $l = \frac{\Delta L_t^*}{L_t^*} = 0,02$, коэффициенты в формуле для темпа прироста ставки реальной заработной платы $\rho = 0,6$, $\gamma = 0,568$. В начале рассматриваемого процесса имеем прирост показателя занятости $\upsilon_0 = 0,96$, а доля труда в национальном доходе $\delta_0 = 0,5$.

Построить графические зависимости прироста показателя занятости и доли труда в национальном доходе от времени.

Р е ш е н и е. Подставив данные из примера в систему уравнений **(9.20)**, получим:

$$\begin{cases} \frac{d\delta}{dt} = 0,6\upsilon(t)\delta(t) - 0,618\delta(t), \\ \frac{d\upsilon}{dt} = -0,2\upsilon(t)\delta(t) + 0,13\upsilon(t). \end{cases}$$

Такую систему дифференциальных уравнений с высокой степенью точности можно решить практически на любом современном компьютере. Для этих целей можно использовать без ущерба для точности самый простой метод, называемый *методом ломаных*. Для этих целей выбираются начальные точки интегральных кривых $(0,\upsilon_0)$ и $(0,\delta_0)$. Из системы дифференциальных уравнений находят направления касательных к этим интегральным кривым в точке $t = 0$. В положительном направлении идем с шагом $\Delta t = h$ до точек (t_1,υ_1) и (t_1,δ_1), где $t_1 = h$, а $\upsilon_1 = \upsilon_0 + (-0,2\upsilon_0\delta_0 + 0,13\upsilon_0)\cdot h$, $\delta_1 = \delta_0 + (0,6\upsilon_0\delta_0 - 0,618\delta_0)\cdot h$. В точках (t_1,υ_1) и (t_1,δ_1) повторяем тот же прием. То есть из системы дифференциальных уравнений находят направления касательных к интегральным кривым в точке $t = h$. В положительном направлении идем с шагом $\Delta t = h$ до точек (t_2,υ_2) и (t_2,δ_2), где $t_2 = 2h$, а $\upsilon_2 = \upsilon_1 + (-0,2\upsilon_1\delta_1 + 0,13\upsilon_1)\cdot h$, $\delta_2 = \delta_1 + (0,6\upsilon_1\delta_1 - 0,618\delta_1)\cdot h$, и т.д. Используя приведенный прием, рассчитаны графики функций показателя занятости υ и доли труда в национальном доходе δ и построены графики этих функций, которые представлены на рис. 9.19.

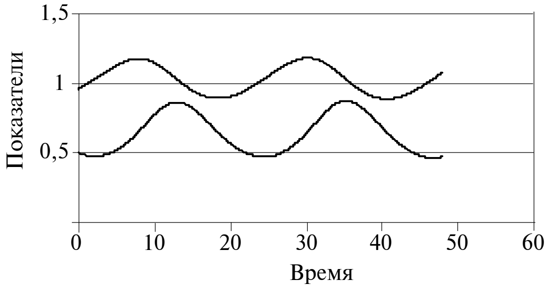


Рис. 9.19. **Показатель занятости и доля труда в национальном доходе** ◄

Ход функций показателя занятости $\upsilon(t)$ и доли труда в национальном доходе $\delta(t)$ проанализируем по их траектории на рис. 9.19 рассмотренного примера. Верхний график рисунка представляет собой функцию показателя занятости, а нижний — долю труда в национальном доходе. Видно, что график функции показателя занятости первым достигает, например, максимума, затем показатель занятости начинает уменьшаться, а доля труда в национальном доходе все еще растет. После достижения максимума доли труда в национальном доходе падает как эта доля, так и показатель занятости до тех пор, пока показатель занятости не достигнет минимума. Затем показатель занятости начнет возрастать, а доля труда в национальном доходе будет все еще уменьшаться и т.д. В таких случаях говорят, что два колебательных процесса сдвинуты по фазе.

9.7. Практическое использование экономических циклов

9.7.1. Прогнозирование

Объектом прогнозирования на основе экономических циклов являются крупные социально-экономические системы, взаимодействующие между собой в масштабах глобального мирового сообщества [4, 5]. В цитируемой литературе объектом прогнозирования является национальная экономика России. Прогнозирование проводится с использованием теории циклов Кондратьева с целью разработки научно обоснованных представлений о возможных состояниях объекта в будущем и об альтернативных путях его развития.

Разработчик прогноза никогда не обладает полной информацией, способной исключить любую неопределенность. В общем случае для исключения неопределенности необходимо использовать бесконечное число обстоятельств.

Следует различать два понятия: неопределенность и риск. *Неопределенность* определяется неполнотой и неточностью информации об условиях реализации плана, составленного на основе прогноза. *Риск* — это возможность возникновения в ходе реализации плана неблагоприятных ситуаций и последствий. Риск является субъективным понятием. Для одних участников экономического процесса возникающие последствия могут негативным образом сказаться на результатах, для других — позитивным.

Слово «риск» имеет испанско-португальские корни и означает «риф», «подводная скала». Это ассоциируется с понятием «лавировать между скалами», а значит, сопряжено с опасностью.

С появлением товарно-денежных отношений риск становится экономической категорией. Результаты проявления неопределенности могут быть положительными, т.е. доход или другая выгода могут увеличиться по сравнению с ожидаемыми. Однако о риске чаще всего говорят в негативном смысле.

Развитие плана является динамическим процессом. В каждый отдельно взятый момент времени условия могут изменяться. Это приводит к необходимости изменения ранее установленных параметров развития плана.

Любой закон природы или общественное явление могут быть выражены в виде описания взаимосвязей, существующих между показателями этого закона или явления. Связи между показателями, часть которых являются случайными, изучает статистика.

Функционирование изучаемого объекта можно описать набором переменных. Эти переменные подразделяют на:

- независимые (экзогенные, предикторные, объясняющие), которые не обязательно являются случайными величинами;
- зависимые (эндогенные, результирующие, объясняемые), которые обязательно являются случайными величинами.

Задача измерения связи между переменными решается на эмпирическом материале, представляющем собой выборку. Если количество независимых переменных больше единицы, то исследуемая модель называется *многофакторной.*

Корреляционно-регрессионные методы прогнозирования базируются на том, что существует ряд факторов, влияющих на данную экономическую характеристику. Например, на валовой внутренний продукт могут влиять инвестиции, государственные расходы, чистый экспорт, автономное потребление, предельная склонность к потреблению, налоги и т.д.

Частным случаем корреляционно-регрессионного метода прогнозирования является *трендовый метод.* Этот метод основан на анализе динамических рядов, представляющих собой совокупность ряда значений некоторого параметра, определяемого в различные моменты времени.

Экспертный метод прогнозирования строится на основе информации об объекте, полученной от экспертов. Этот метод предназначается для решения сложных задач, которые нельзя исследовать при помощи других методов. Связано это с высокими расходами при использовании метода и большими сроками проведения. Количество экспертов при проведении работы должно составлять 10—100 человек.

Экспертный метод прогнозирования черпает свои начала в глубокой древности. Примерами экспертных групп для разработки и принятия решений являются советы старейшин, военные советы, думы, коллегии и т.д. До сих пор метод экспертных оценок остается единственной возможностью для составления прогнозов развития сложных систем и проблем, которые относятся к слабоструктурируемым. К таким системам и проблемам относится экономика.

Работа по проведению экспертного прогнозирования сводится к организации процедуры экспертизы, подбору экспертов, проведению опроса экспертов, обработке результатов опроса, разработке выводов и принятию решений. В соответствии с этими процедурами создается структура организации прогноза. В нее входят руководитель группы прогноза, группа специалистов по проведению экспертного опроса, эксперты по проблемам, группа обработки данных.

Группа специалистов по проведению экспертного опроса разрабатывает вопросы для экспертов, анализирует и обрабатывает полученные данные. При ответе на поставленные вопросы экспертам запрещаются взаимные консультации и переговоры. При опросах используются анкетирование, интервьюирование, мозговой штурм, дискуссия.

Для выявления случайных воздействий на основные показатели плана используется также *метод сценариев.* Анализ сценариев позволяет, например, определить случайные воздействия на основные показатели плана. При этом отклонения параметров рассчитываются с учетом корреляции между ними. Часто при проведении анализа риска используются три сценария: базовый, пессимистический и оптимистический. При проведении прогнозирования методом сценариев возникают трудности при выборе исходных пессимистических и оптимистических показателей. Этого недостатка лишен *имитационный метод Монте-Карло.*

Впервые описание метода Монте-Карло появилось в 1949 г. Название методу дал известный своими казино город Монте-Карло в княжестве Монако, так как именно рулетка является простейшим механическим прибором по реализации процесса получения случайных чисел, используемых в данном методе. При использовании метода Монте-Карло строится математическая модель результирующего показателя как функции от переменных и параметров. Математическая модель пересчитывается при каждом новом имитационном эксперименте, в течение которого значения основных неопределенных переменных выбираются случайным образом на основе генерирования случайных чисел. Результаты всех имитационных экспериментов объединяются в выборку и анализируются с помощью статистических методов. Основная цель метода — получение закона распределения вероятностей результирующего показателя. В отдельных случаях закон распределения не определяют, а ограничиваются моментами, характеризующими статистические параметры объекта. Для анализа имитационных моделей могут быть использованы современные ЭВМ. Это связано с тем, что расчеты являются очень трудоемкими и их количество велико.

Алгоритм определения закона распределения интересующего показателя или моментов этого распределения сводится к следующему.

1. Строится математическая модель результирующего показателя как функции от переменных и параметров. Под переменными понимаются величины, которые будут изменяться в процессе компьютерного эксперимента. Параметры — это те величины, которые не изменяются во времени.

2. Проводится анализ выбранных переменных. Из их числа выбираются только те, изменение которых существенным образом влияет на результат. Для этих целей можно, например, провести анализ чувствительности исследуемого основного показателя от различных факторов и выбрать из них те, к которым этот показатель является наиболее чувствительным.

3. Определяются законы распределения выбранных переменных и корреляционные связи между ними.

4. Проводится компьютерный эксперимент, состоящий из заданного количества опытов. Количество опытов должно быть достаточным для построения репрезентативной модели:

- для каждого опыта генерируются случайные числа, являющиеся реализацией каждой случайной переменной;
- для полученных случайных чисел рассчитывают результирующий показатель, после чего получают выборку, имеющую количество показателей, равное количеству опытов;

- проводят статистический анализ выборки на предмет определения закона распределения результирующего показателя или определения моментов этого распределения.

В общем случае прогнозирование включает в себя:

- описание состояний объекта, его функционирование в настоящем и будущем и разбор выявленных закономерностей изменения;
- предсказание возможных вариантов развития, объекта и среды, в которой он находится;
- раскрытие возможных решений и действия по реализации благоприятных вариантов.

Рассматриваемые прогнозы делятся на:

- дальнесрочные — 20—30 лет;
- долгосрочные — 10—20 лет.

Теория цикличности развития Кондратьева позволяет достаточно полно предсказывать будущее, основанное на цикличном развитии экономики. Такой прогноз сводится к предвидению смены фаз и перелому тенденций, моментов наступлений, сроков и глубины кризисов. Предвидение кризисных фаз является трудной, но очень важной задачей.

При прогнозировании в структуре каждого цикла выделяют следующие сменяющие друг друга фазы [4, 5]:

- зарождение новых моделей, нового поколения техники, их научная разработка;
- инновационное освоение нового продукта или технологии, более эффективных форм организации производства, рыночных механизмов;
- распространение, или диффузия, нововведения, освоение новых рынков, быстрое расширение производства, снижение издержек и цен, получение высокой прибыли.

При этом производство продукции уходящего цикла характеризуется стабильностью объемов, потребление также стабильно, но прибыль постоянно уменьшается. Затем происходит вытеснение старой продукции с рынка более эффективной продукцией следующего поколения.

9.7.2. Модель Ханса Виссема

Свою модель с шестью стадиями [1] Ханс Виссема связывал с моделью Кондратьева. Возникновение и смена циклов объясняются инновационными процессами, движением инвестиций, ценами на продукты, сырье и другие ресурсы. Период бума характеризуется влиянием ряда растущих отраслей. Этот рост определяется инновациями в области технологий и продуктов. По Виссема, бум четвертого цикла определялся ростом промышленности (сталелитейной, кораблестроительной, автомобилестроительной, текстильной, нефтехимической, по созданию синтетических красок и волокон, пластмассы). Развивающиеся отрасли мобилизовали за собой другие отрасли. При достижении зрелости количество продуктов начинает превышать потребности, спрос падает, возникает избыток рабочей силы и недоиспользование оборудования, отрасли начинают пересматривать свою деятельность, что является причиной наступления рецессии. Если бы в это время новые секторы были готовы к восприятию новых инноваций и к расширению своей деятельности, то они поглотили бы избыток рабочей силы и стадия рецессии была бы отодвинута или не наступила бы вовсе. Из сказанного возникает возможность продления стадии бума за счет поддержки новых перспективных отраслей. Практика, к сожалению, показывает, что этого не случается.

Существует также связь циклов Кондратьева с изменениями культуры и социальными потребностями в обществе. Новому периоду оживления, как правило, свойственны согласие в новых ценностях и социальных целях. В это время разрабатываются и приобретаются знания и умения в новых видах деятельности, которые являются основой нового периода роста. Причем происходит рост в экономике, технике и технологиях, в социальной сфере. Общество ставит перед собой новые цели. Эти цели достигаются в период оживления и бума. Как только эти цели достигаются, в обществе начинается период переосмысления уже старых ценностей и целей. Общество разделяется во взглядах на эти ценности и цели. «Некоторые пытаются контролировать ситуацию, применяя обычную мудрость, которая, к сожалению, не помогает в таких случаях. Все это приводит к созданию противоречивого и подозрительного общества, в котором большие надежды разрушаются инфляцией, а существующие структуры уже не в состоянии работать» [1]. Началась депрессия. Возникают новая культура и новые структуры.

Эти новые структуры возникают и формируются в период депрессии. Пока согласия внутри организации нет, то деятельность ее в основном направлена на диспуты, исследования и эксперименты. Стратегия организации в это время должна быть направлена не только на решение технических и технологических задач, но и на выработку единых для всех целей и на укрепление социального единства.

Порой в работу отраслей в период депрессии начинают вмешиваться правительства, которые берут на себя роль регуляторов экономической и социальной жизни. Иногда это приводит к возникновению неблагоприятных эффектов, которые потом устраняются с большими трудностями. В 1990-е гг. в России было установлено большое количество льгот для различных слоев населения. В начале XXI в. эти льготы стали определенным препятствием для развития рыночной экономики. Неумелые попытки отмены этих льгот привели к еще большим неприятностям.

Из числа социальных проблем, которые необходимо решить для успешного преодоления сегодняшних трудностей, можно выделить следующие.

1. Создание условий реального равенства между женщиной и мужчиной. Основная трудность при решении этого вопроса состоит в воспитании и уходе за детьми в дневное время. Таким образом, возможности женщин, связанные прежде всего с их аккуратностью и бóльшим прилежанием по сравнению с мужчинами, не используются. Конечно, желание женщин трудиться должно быть добровольным и не связанным с материальными трудностями и материальной необходимостью.

2. Повышение общего образования людей. На примере России видно, что желающих повысить свой образовательный уровень довольно много. Задачей руководства страны является не создание препятствий на этом пути, а создание условий для качественного образовательного процесса. Конечно, следует заимствовать все достижения в процессе образования, полученные в разных странах. Но слепое копирование методов и систем образования ничего кроме вреда не принесет. В России необходимо повысить уровень образования и на первых порах довести его до утерянного в 1990-е гг. уровня.

3. В развивающихся странах уровень социального обеспечения необходимо на первых порах довести до уровня передовых рыночных стран. В России надо искоренить бедность, поднять престиж учителя средней и высшей школ, создать нормальные условия для получения образования, обеспечить стариков нормальной пенсией.

4. Сокращение рабочей недели во всех странах, что позволит людям развивать общую культуру, которая, безусловно, связана с корпоративной культурой, и, в частности, повышать свой образовательный уровень. Особенно сокращение рабочего времени необходимо в России. После событий начала 1990-х гг. рабочая неделя в России существенно возросла. Длительность рабочего дня на некоторых предприятиях достигает 12 и более часов. Несмотря на это, молодежь стремится к знаниям, что проявляется в обучении молодых людей на всевозможных курсах повышения квалификации, факультетах для вечернего обучения и т.д. Все это происходит на фоне высоких цен за обучение.

Х. Виссема рассматривал четвертый цикл и начало пятого. Он предложил модель стратегии с шестью стадиями. Связь шести стратегических стадий с четвертым циклом Кондратьева представлена на рис. 9.20.

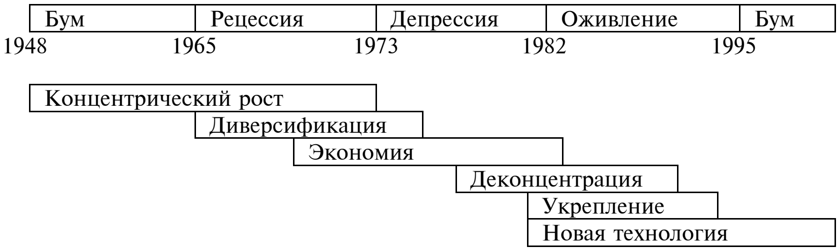


Рис. 9.20. **Связь шести стратегических стадий Х. Виссема с четвертым циклом Кондратьева**

Первая строчка рисунка — стадии четвертого цикла Кондратьева, начинающегося в данном случае с бума. Нижние шесть строчек — шесть стратегических стадий. Эти шесть основных стадий получены на основе анализа стратегий предприятий, которых они придерживались в соответствующие временны́е периоды.

1. Стратегия роста (1948—1973) основывается на концентрическом росте, т.е. на повышении качества продукции, понижении издержек и увеличении выпускаемых товаров. Эти товары соответствовали спросу со стороны потребителей, что вызывало со стороны организаций попытки еще более повысить качество при снижении издержек. Для увеличения количества выпускаемых товаров расширялись производства существующих продуктов.

Проведенный Х. Виссема анализ показывает, что многие организации проводили стратегию концентрического роста дольше, чем это было оправданно уже тогда известными экономическими факторами. Это стало причиной избытка мощностей в сталелитейной и нефтехимических отраслях, в производстве синтетических волокон. Поэтому следует помнить, что экстраполяционные методы прогнозирования, особенно по линейному тренду, не всегда бывают удачными из-за того, что ход тренда изменяет свое направление. Например, возрастающий тренд рано или поздно начнет убывать. Это необходимо вовремя обнаружить и изменить стратегию. Для этого нужны простые в обращении компьютерные процедуры, позволяющие это сделать и рассчитать характеристики новой стратегии.

2. Стратегия диверсификации (1965—1975) предусматривает новые коммерческие виды деятельности, когда выбираются новые продукты и рынки. Диверсификация является одной из стратегий матрицы Ансоффа. В конце 1960-х гг. большое количество товаров достигло стадии зрелости. Инвестиции в развитие этих товаров уже не приносили ожидаемых доходов. Этот период характерен поглощениями и слияниями компаний. Слияния проводились в основном под лозунгом синергии, т.е. ожидания большей эффективности за счет объединения ресурсов. При этом не учитывалось, что слияние двух маленьких компаний дает слишком незначительные результаты за счет увеличения издержек объединенной компании и увеличения инертности при принятии решений. Не учитывались также трудности при достижении синергетического эффекта. Этот эффект не появляется только от слияния, для его получения требуется сложная и кропотливая работа.

Компании начинают устанавливать новые виды деятельности, сутью которых является выбор новых продуктов и новых рынков. Диверсификация только тогда будет успешной, если разрабатывается новый продукт для новой целевой группы потребителей.

В начале 1970-х гг. пришло понимание того, что диверсификация не дает никакого роста экономике.

Х. Виссема утверждает, что диверсификация началась тогда, когда она была уже невозможна. В это время надо было укреплять уже существующие виды деятельности.

3. Стратегия экономии (1969—1985) началась слишком поздно. Эта стратегия использовалась в конце периода рецессии и в период депрессии, когда компании вначале перестали принимать новых сотрудников, а затем приступили к их сокращению. Этот период характерен широким государственным участием, инфляцией и существенной безработицей. Доверие к стратегическому менеджменту стало убывать, многие сократили отделы стратегического планирования. Это период неопределенности в деятельности предприятий, неуверенности в выживании.

4. Стратегия деконцентрации (1981—1990) характеризуется продажей тех видов деятельности, которые не входили в основной бизнес, т.е. концентрацией на основных видах деятельности. Идеи стратегического управления впервые были применены в период деконцентрации. Стали широко использоваться внешние ресурсы. Если поставщик может сделать комплектующие лучше, гарантирует качество и сроки поставки, то используются поставляемые комплектующие. Эта стратегия существенно зависит от факторов качества поставляемых комплектующих и логистики, которым стали уделять самое пристальное внимание. Большое значение в такой ситуации и приобрел отдел снабжения, от которого в большой степени зависит все производство. В это время началась децентрализация компаний по бизнес-единицам.

5. Стратегия выборочного роста или укрепления (1983—1993), в которой основные виды деятельности, оставшиеся после окончания четвертой стадии, укрепляются за счет увеличения рентабельности и конкурентоспособности. Это достигается путем:

- сокращения издержек за счет усиления маркетинга, сокращения штата, автоматизации процессов, введения системы повышения качества, обучения сотрудников, улучшения морального климата в коллективе;
- повышения эффективности инновационной деятельности, предусматривающей проведение научно-исследовательских работ, создание продуктов на основе изобретений, развитие рационализаторства;
- предложения дополнительных услуг и создания продуктов по желанию потребителей (например, установка специального оборудования на автомобиль);
- предоставления продуктов или услуг, которые вместе составляют систему (например, каждую программу Microsoft можно использовать при соединении с любой другой программой);
- увеличения доли рынка за счет выхода на мировой рынок при руководстве бизнесом из центра;
- вступления в стратегические альянсы.

6. Инновационная стратегия основывается на инвестировании в новые технологии и в новые рынки. Обычно эта стратегия базируется на разработке и внедрении инновационных проектов, предусматривающих создание и производство нового или существенно усовершенствованного, как правило, запатентованного продукта на основе новой или известной технологии, а также производство известного продукта на основе новой технологии.

Таким образом, стратегия предприятия во многом определяется фазой цикла Кондратьева. Заблаговременное изменение стратегии в соответствии с наступающей фазой цикла ставит предприятие в более выгодное положение по сравнению с конкурентами.

Упражнения

Задача 9.1. Функция потребления домашних хозяйств имеет вид: $C_t = 200 + 0,8 \cdot Y_{t-1}$, а функция спроса на инвестиции — $I_t = 1000 + Y_{t-1} - Y_{t-2}$.

Построить траекторию при граничных условиях $Y_0 = 4000$, $Y_1 = 4200$.

Задача 9.2. Автономный спрос ежегодно увеличивается на 3%. Остальные условия те же, что и в задаче 9.1.

Построить траекторию при граничных условиях $Y_0 = 4000$, $Y_1 = 4200$.

Задача 9.3. Акселератор в условиях примера 9.3 увеличился до 0,82. Остальные условия не изменились.

Построить траекторию выхода.

Библиографический список

1. *Виссема Х.* Стратегический менеджмент. М.: Финпресс, 2000.
2. *Глазьев С.Ю.* Теория долгосрочного технико-экономического развития. М.: ВлаДар, 1993.
3. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971.
4. *Кузык Б.Н.*, *Яковец Ю.В.* Россия — 2050: стратегия инновационного прорыва. М.: Экономика, 2005.
5. *Кузык Б.Н.*, *Кушлин В.И.*, *Яковец Ю.В.* Прогнозирование и стратегическое планирование социально-экономического развития. М.: Экономика, 2006.
6. *Тарасевич Л.С.*, *Гребенников П.И.*, *Леусский А.И.* Макроэкономика. М.: Высшее образование, 2007.
7. *Экономическая* теория / Под ред. В.И. Видяпина и др. М.: ИНФРА-М, 2000.
8. *Gordon I.* et all. The Long Wave Analyst. http://www. thelongwaveanalyst.ca.

Глава 10

Рынок труда

10.1. Понятие рынка труда и рабочей силы

Рынок труда [1, 4, 5] — совокупность экономических отношений и методов, механизмов и институтов, направленных на куплю-продажу рабочей силы. На этом рынке совершается обмен труда, выступающего как товар, на заработную плату. Здесь формируются спрос, предложение и цена на рабочую силу. Без рынка труда невозможно функционирование и развитие рыночной экономики.

Субъектами на рынке труда выступают, с одной стороны, предприниматели и государство, а с другой — работники и профсоюзы.

Цена труда на рынке называется *ставкой заработной платы*, которая является денежной формой стоимости рабочей силы.

Рассматривают социальную и экономическую функции труда. *Социальная функция* заключается в обеспечении уровня доходов и благосостояния людей, а также воспроизводства растущих производственных способностей работников. *Экономическая функция* заключается в распределении и перераспределении трудовых ресурсов по сферам, отраслям, регионам, профессиям, квалификации согласно спросу и предложению.

Регулятором рынка труда выступают макроэкономические, микроэкономические, социальные и психологические факторы. Два последних не всегда имеют отношение к заработной плате. Производительность труда во многом зависит от организации трудового процесса и от уровня личной заинтересованности работника к работе.

На рынке труда имеет место постоянное превышение предложения рабочей силы над спросом на нее. Поэтому происходит конкурентная борьба между работниками за свободные рабочие места. Принимают, как правило, на работу того, кто обеспечит собственнику бóльшую прибыль.

На спрос и предложение рабочей силы влияют следующие факторы [1]:

на спрос рабочей силы

- величина спроса на товары и услуги отрасли, обеспечивающей спрос рабочей силы; чем большим спросом пользуются товары и услуги отрасли, тем больше спрос на труд;
- величина предельной нормы замены труда капиталом (фондами), определяемая формулой **(3.6)**; чем больше эта предельная норма, тем больше спрос на труд;
- ставка заработной платы, при увеличении которой уменьшается спрос на труд;
- фаза экономического цикла; в фазе подъема экономики спрос на труд увеличивается, а во время кризиса — сокращается, и имеет место сокращение излишней рабочей силы;
- монополизация ограничивает спрос на труд с целью сокращения ставки заработной платы;

на предложение рабочей силы

- демографические, связанные с рождаемостью и смертностью, от которых зависит численность населения; рост населения повышает предложение рабочий силы;
- вовлечение женщин в рабочий процесс повышает предложение рабочий силы;
- увеличение пенсионного возраста повышает предложение рабочий силы;
- трудовая иммиграция из сопредельных и удаленных стран повышает предложение рабочей силы;
- дополнительные источники дохода, кроме заработной платы, понижают предложение рабочей силы.

Рабочая сила — трудоспособное население страны, т.е. все те, кто по возрасту и состоянию здоровья способен работать. Характеризуется состоянием физических и умственных способностей людей, которые используются ими в процессе производства, общим количеством работников в стране, возможностью получения образования и развития в процессе трудовой деятельности, половозрастной структурой.

10.2. Спрос на труд

Различают неоклассическую и кейнсианскую функции спроса на труд [4].

Неоклассическая функция спроса на труд основывается на совершенной конкуренции на всех рынках. Спрос на труд определяется предпринимателями, которые хотят получить максимально возможную выручку. Максимум прибыли определяется при выполнении соотношения [4]

$$P\frac{dY}{dL} = W^*,$$

где P — уровень цен; Y — выпуск; L — труд, или количество работников; W^* — ставка номинальной заработной платы.

Ставка реальной заработной платы определяется как отношение номинальной заработной платы к уровню цен:

$$W = \frac{W^*}{P}.$$

Тогда формулу для максимума прибыли можно переписать в виде:

$$\frac{dY}{dL} = W.$$

Производная $\frac{dY}{dL}$ показывает скорость изменения выручки предпринимателя от изменения труда. В оптимальном случае эта скорость равна реальной заработной плате. Из формулы для максимума прибыли следует формула для оптимального выпуска:

$$Y = \int W(L)\,dL + D,$$

где D — постоянная интегрирования.

Функция $W = W(L)$ называется *функцией спроса на труд*. Для ее определения в качестве производственной функции примем функцию Кобба—Дугласа **(3.1)**, имеющую вид:

$$Y = K^{\alpha} L^{1-\alpha},$$

где K — капитал, $0 < \alpha < 1$, $K > 0$, $L > 0$.

Для определения функции спроса для технологии, определяемой производственной функцией Кобба—Дугласа, надо найти от нее производную по труду, т.е.

$$W = \frac{dY}{dL} = (1-\alpha) K^{\alpha} L^{-\alpha}.$$

График неоклассической функции спроса представлен на рис. 10.1.

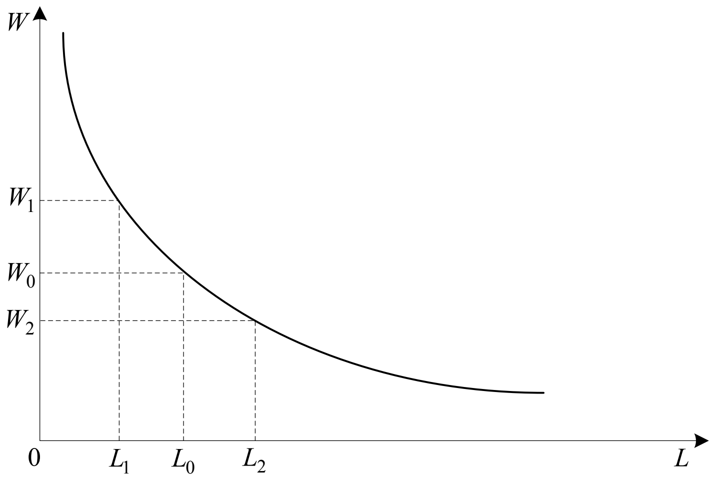


Рис. 10.1. **График неоклассической функции спроса**

Функция спроса является убывающей, т.е. при снижении реальной заработной платы спрос на труд возрастает. Например, при реальной заработной плате W_0 требуется L_0 работников (см. рис. 10.1). Если заработная плата увеличилась до W_1, то количество требуемых работников уменьшилось до L_1. Если же заработная плата упала до W_2, то количество требуемых работников увеличилось до L_2.

Кейнсианская функция спроса на труд зависит от эффективного спроса, определяемого точкой пересечения линии *IS* (инвестиции-сбережения) и линии *LM* (предпочтение ликвидности-деньги), показанной на рис. 8.3. В этой точке достигается макроэкономическое равновесие на товарном и денежном рынках. Точка равновесия называется *эффективным спросом*. На рис. 10.2 линии *IS* и *LM* представлены в квадранте III, где эффективный спрос обозначен Y^D.

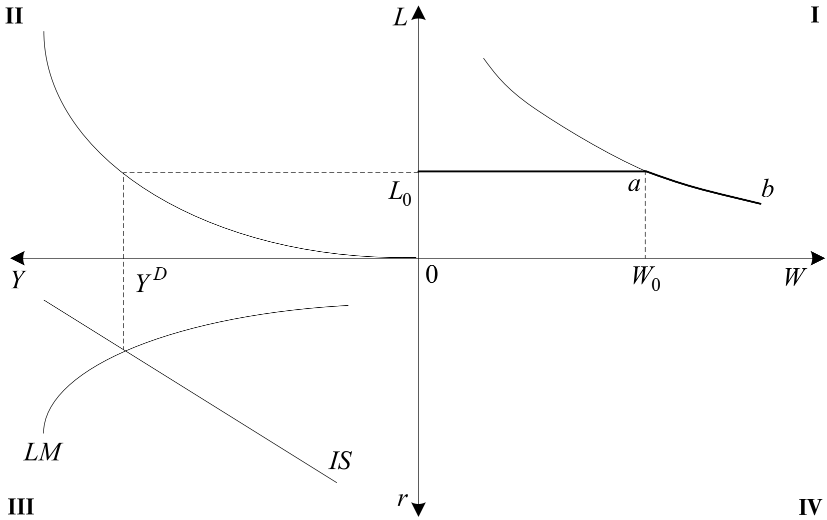


Рис. 10.2. **График кейнсианской функции спроса**

По графику производственной функции, представленной в квадранте II, находим количество труда L_0, необходимого для производства продукции в объеме Y^D. Затем, используя график неоклассической функции спроса (см. рис. 10.1), представленный в квадранте I (см. рис. 10.2), находим цену спроса на труд W_0. Реальная ставка заработной платы при ее уменьшении относительно W_0 теперь уже не будет изменяться по классическому закону, представленному на рис. 10.1. Спрос на труд останется равным L_0 и в том случае, если труд будет предложен ниже цены W_0. Это связано с излишком рабочей силы на рынке труда в рассматриваемой ситуации. Поэтому предприниматель не захочет повышать ставку реальной заработной платы. Отсюда следует, что график функции $L(W)$ будет параллелен оси $0W$. Если же спрос на труд будет уменьшаться относительно L_0, то ставка заработной платы будет плавно увеличиваться относительно W_0. Тогда график функции $L(W)$ будет совпадать с кривой ab. Таким образом, графиком кейнсианской функции спроса на труд является ломаная линия L_0ab.

10.3. Предложение труда

Так же, как и для случая спроса на труд, рассматривают неоклассическую и кейнсианскую функции предложения труда. И в том и в другом случае имеет место возрастающая функция предложения труда от ставки заработной платы. Это значит, что при повышении ставки заработной платы предложение труда растет.

Предложение труда в современной экономике развитых стран обусловлено сравнительно высокой ставкой заработной платы. В этих условиях доход работника превышает минимум средств для существования его и его семьи. Свой доход такой работник может делить на потребление и накопление.

В неоклассической теории предложение труда во многом зависит от величины процентной ставки. Именно эта ставка определяет пропорцию распределения дохода между нынешним и будущим потреблением. При повышении процентной ставки будущий доход от накопления увеличится, и работник, сокращая свое свободное время, увеличивает предложение труда. При понижении процентной ставки работник увеличивает свое свободное время, т.е. уменьшает предложение труда.

Рассмотрим, как изменяется предложение труда в *неоклассической теории* при росте уровня цен. График функции реальной ставки заработной платы от предложения труда представлен на рис. 10.3.

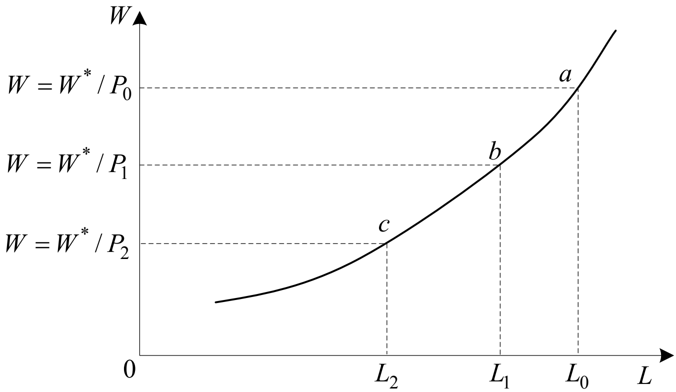


Рис. 10.3. **График неоклассической функции реальной ставки заработной платы от предложения труда**

В соответствии с воззрениями неоклассиков изменение уровня цен влияет на величину предложения труда. Если при неизменной номинальной ставке заработной платы W^* увеличивается уровень цен с P_0 до P_1, а затем до P_2 $\left(P_0 < P_1 < P_2\right)$, то реальная ставка заработной платы будет уменьшаться, т.е. $\frac{W^*}{P_0} > \frac{W^*}{P_1} > \frac{W^*}{P_2}$. При этом предложение труда также будет уменьшаться. Эта ситуация отображена на графике (см. рис. 10.3). При уровне цен, равном P_0, ситуация отображается точкой a на кривой рисунка. Предложение труда в этом случае равно L_0. При уровне цен P_1 из точки a кривой перемещаемся в точку b. При этом предложение труда равно L_1. И, наконец, при уровне цен P_2 смещаемся в точку c, где предложение труда равно L_2.

В *кейнсианской теории* до достижения полной занятости предложение труда совершенно эластично по отношению к ставке заработной платы. Это связано с тем, что безработные продают свой труд по установившейся цене. Тогда при неизменной номинальной ставке заработной платы W^* увеличение уровня цен с P_0 до P_1 и до P_2 приведет к уменьшению реальной ставки заработной платы. Предложение труда при этом не изменится (рис. 10.4) и всегда будет равно L_0. При увеличении уровня цен точка A на графике функции предложения перемещается в точку B, а затем в точку C.

Предложение труда остается постоянным. Изменение процентной ставки в этой теории на предложение труда не влияет.

Рис. 10.4. **График кейнсианской функции реальной ставки заработной платы от предложения труда**

В условиях полной занятости при увеличении реальной ставки заработной платы предложение труда будет возрастать. В этом случае график функции реальной ставки заработной платы от предложения труда будет вести себя так же, как показано на рис. 10.3.

10.4. Равновесие на рынке труда и безработица

Равновесие на рынке труда достигается в том случае, если количество запрашиваемого труда равно количеству предлагаемого. Пусть это равновесие установилось в точке (L_0, W_0) пересечения кривых функции спроса и предложения, представленных на рис. 10.5.

Равновесный уровень занятости L_0 достигается при реальной заработной плате W_0. Равновесный уровень занятости называют также полной и эффективной занятостью. *Полная и эффективная занятость* означает, что каждый желающий продать свой труд по реальной ставке заработной платы W_0 может осуществить свое желание. Но из этого не следует, что полностью исчерпаны все трудовые ресурсы. Отсюда следует, что при увеличении реальной ставки заработной платы до W_1 предложение труда возрастет до L_2. Предприниматели же строят свою кадровую политику из условия спроса на труд количеством L_1. Это противоречие приводит к величине безработицы, равной $L_2 - L_1$.

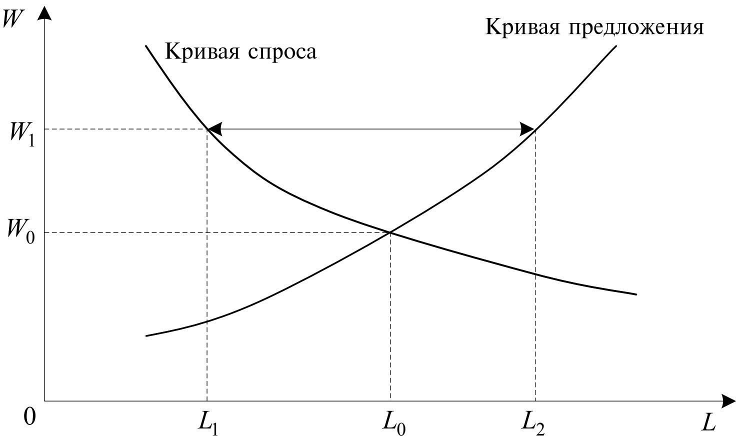


Рис. 10.5. **Точка равновесия на рынке труда**

Таким образом, в условиях совершенной конкуренции рост реальной заработной платы относительно равновесного вызывает снижение спроса на труд и увеличение предложения труда. Избыток труда и возникшая безработица оказывают влияние на реальную ставку заработной платы, которая под воздействием этих факторов уменьшается. Это происходит до тех пор, пока реальная ставка заработной платы не займет равновесное положение.

Если имеет место устойчивая безработица, то это означает, что на рынке труда действуют неконкурентные факторы, способствующие устойчивому отклонению вверх от равновесного уровня реальной ставки заработной платы. К таким факторам можно отнести деятельность правительства и профсоюзов.

Правительство в законодательном порядке может регулировать уровень заработной платы, повышая ее выше равновесного уровня реальной ставки заработной платы. Если такое состояние удерживается длительное время, то это приведет к устойчивой безработице.

Усилия профсоюзов, направленные на борьбу за повышение заработной платы наемных работников, также могут привести к повышению уровня заработной платы относительно равновесного уровня реальной ставки заработной платы. Такая ситуация тоже может привести к устойчивой безработице.

10.5. Безработица и ее характеристики

Безработица — это недоиспользование труда из-за отсутствия равновесия на рынке труда, вызванного превышением величины предложения труда над величиной спроса на труд. Все взрослое население страны с точки зрения занятости в трудовом процессе делится на категории:

1) трудоспособное население — все те, кто по возрасту и по состоянию здоровья способен работать;

2) рабочая сила, или экономически активное население, — занятые, или работающие, люди и безработные. В западных странах к рабочей силе не относятся учащиеся средних школ и высших учебных заведений, служащие в армии на основе обязательного призыва, домохозяйки и те, кто не хочет работать. В России учащиеся высших учебных заведений и служащие в армии на основе обязательного призыва включаются в состав рабочей силы;

3) занятые лица — люди, которые в рассматриваемый период выполняли работу по найму за вознаграждение. В экономике к ним относятся также временно отсутствующие на работе из-за болезни или травмы, из-за ухода за больными, из-за забастовки, находящиеся в отпуске, повышающие свою квалификацию вне рабочего места, выполняющие работу без оплаты на семейном предприятии;

4) безработные — люди, которые не имеют работу, но ищут ее. По определению Международной организации труда безработным считается человек, который хочет работать, может работать, но не имеет рабочего места.

Различают несколько типов безработицы: фрикционную, структурную, циклическую, сезонную, региональную.

Фрикционная безработица является следствием поиска работы во время перехода с одной работы на другую, поиска работы после окончания учебного заведения, переезда из одного города в другой и т.д. Для поиска работы требуется некоторое время, в течение которого эти люди считаются безработными. Поскольку такие люди, как правило, меняют место работы по собственной инициативе, их называют добровольно безработными.

Структурная безработица связана с несовпадением спроса на рабочую силу определенной квалификации и специализации с предложениями. Такие несовпадения возникают из-за сдвигов в профессионально-квалификационной структуре рабочей силы и диспропорции между спросом на работников определенных профессий и их предложением. Например, увольнения шахтеров из-за закрытия угольных шахт в России привели к увеличению безработицы, так как не все эти шахтеры смогли переквалифицироваться и найти новое место работы.

Развитие экономики связано с появлением новых товаров и технологий. При этом, как правило, требования к квалификации повышаются, некоторые профессии отмирают. В результате происходят изменения в структуре рабочей силы, связанные с отраслевым и территориальным перераспределением. Если же уволенные в результате этих изменений работники не могут найти новую работу, то возникает структурная безработица, которая носит вынужденный характер, так как работник желает работать при уровне фактически сложившейся заработной платы для работников аналогичной квалификации, но не может найти работу, несмотря на усилия по ее поиску.

Циклическая безработица образуется в периоды экономических спадов, или кризисов. Во время кризисов спрос на товары резко падает, происходит затоваривание, производство товаров резко снижается, что приводит к переизбытку рабочей силы на предприятии и к сокращениям. Как правило, циклическая безработица приводит к увеличению числа безработных во всей стране. Например, в США во время кризиса 1982 г. число безработных увеличилось в 48 штатах из 50 [1]. Это говорит о циклическом характере безработицы.

Сезонная безработица связана с сезонными колебаниями в объеме производства некоторых отраслей: сельское хозяйство, промыслы, строительство. Размеры сезонной безработицы могут быть спрогнозированы с достаточно высокой точностью.

Региональная безработица определяется неравномерностью экономического развития отдельных территорий. Обычно такое явление имеет место в больших странах, например в России. Региональная безработица носит также и международный характер, например в странах СНГ.

Уровень безработицы u определяется как отношение количества безработных U к рабочей силе L:

$$u = \frac{U}{L}. \tag{10.1}$$

В 1960-е гг. М. Фридменом была опубликована теория полной занятости и естественного уровня безработицы.

Полная занятость означает, что каждый желающий продать свой труд по существующей реальной ставке заработной платы может осуществить свое желание. Но из этого не следует, что полностью исчерпаны все трудовые ресурсы. Доля незанятых от общей численности рабочей силы может составлять 5—7%. В разных странах этот показатель может колебаться.

Естественный уровень безработицы — уровень безработицы при полной занятости, соответствующий потенциальному валовому внутреннему продукту. Численность естественной безработицы равна сумме численности за счет фрикционной безработицы и численности за счет структурной безработицы.

Уровень естественной безработицы определяется из следующих соображений. Численность рабочей силы определяется как сумма:

$$L = U + N,$$

где N — работающие лица.

Долю потерявших работу от количества работающих вычисляют по формуле

$$\delta = \frac{n}{N},$$

где n — число потерявших работу.

Долю устроившихся на работу от количества безработных находят как

$$g = \frac{\upsilon}{U},$$

где υ — количество устроившихся на работу.

Полная занятость достигается при равенстве числа устроившихся на работу числу уволенных, т.е. $gU = \delta N$. Подставим сюда $N = L - U$ и, разделив левую и правую части получившегося уравнения на L, получим

$$g\frac{U}{L} = \delta\left(1 - \frac{U}{L}\right).$$

Решив это уравнение относительно $\frac{U}{L}$, найдем $\frac{U}{L} = \frac{\delta}{g+\delta}$. Отношение $\frac{U}{L}$ определяет общее число безработных в состоянии полной занятости, деленное на объем рабочей силы. Это отношение называется естественным уровнем безработицы. Если обозначить естественный уровень безработицы знаком u^*, то можно записать

$$u^* = \frac{\delta}{g+\delta}. \qquad \textbf{(10.2)}$$

▷ **Пример 10.1.** В стране в исследуемом году насчитывается 100 млн чел. работающих, 8 млн чел. безработных, уволено 10 млн чел., принято на работу 10 млн чел.

Определить уровень безработицы и естественный уровень безработицы.

Р е ш е н и е. Уровень безработицы определяется как отношение количества безработных к рабочей силе по формуле

$$u = \frac{U}{L} = \frac{U}{N+U} = \frac{8}{100+8} = 0{,}074.$$

Доля потерявших работу равна:

$$\delta = \frac{n}{N} = \frac{10}{100} = 0{,}1.$$

Доля устроившихся на работу

$$g = \frac{\upsilon}{U} = \frac{10}{8} = 1{,}25.$$

Естественный уровень безработицы находим по формуле

$$u^* = \frac{\delta}{g+\delta} = \frac{0{,}1}{1{,}25+0{,}1} = 0{,}074.$$

Как и следовало ожидать, уровень безработицы в данном случае равняется естественному уровню безработицы. ◀

10.6. Модель Оукена

Уровень циклической безработицы $u_ц$ определяют как разность между уровнем фактической безработицы u и уровнем естественной безработицы u^*:

$$u_ц = u - u^*.$$

Циклическая безработица приводит к снижению валового внутреннего продукта в стране. Разность между потенциальным валовым внутренним продуктом Y^* и фактическим валовым внутренним продуктом Y называется *циклическим разрывом*. Формулу для связи уровня циклической безработицы и циклического разрыва предложил в 1960-х гг. американский экономист А. Оукен. Эта формула имеет вид:

$$\frac{Y^* - Y}{Y^*} = \gamma\left(u - u^*\right), \tag{10.3}$$

где $\frac{Y^* - Y}{Y^*}$ — разрыв ВВП в относительных единицах; γ — коэффициент Оукена.

Коэффициент Оукена характеризует уменьшение валового внутреннего продукта не только из-за сокращения числа работающих, но и из-за изменения экономической активности людей при наступлении кризисов.

▷ **Пример 10.2.** Естественный уровень безработицы равен 6%, а фактический — 9%. Коэффициент Оукена равен 3.
Определить разрыв ВВП в относительных единицах.
Р е ш е н и е. Разрыв ВВП в относительных единицах равен:

$$\frac{Y^* - Y}{Y^*} = -3 \cdot (9 - 6) = -9\%.$$

Таким образом, страна получила ВВП на 9% меньше от потенциально возможного. ◀

Перепишем формулу Оукена в виде:

$$\frac{Y}{Y^*} = 1 + \gamma \cdot u^* - \gamma \cdot u.$$

График этой функции имеет вид, представленный на рис. 10.6.

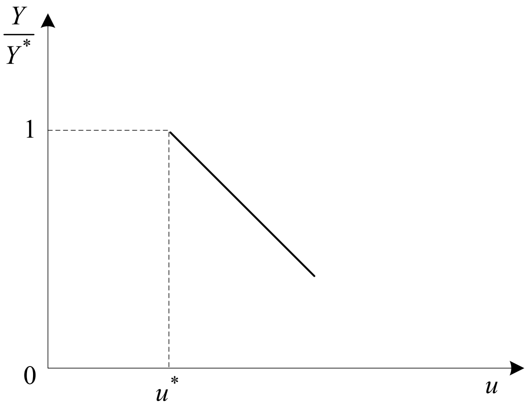


Рис. 10.6. **График функции Оукена**

Если уровень фактической безработицы равен уровню естественной безработицы $\left(u = u^*\right)$, то отношение фактического валового внутреннего продукта будет равно $\frac{Y}{Y^*} = 1$. Это значит, что циклический разрыв равен нулю. При увеличении уровня фактической безработицы отношение $\frac{Y}{Y^*}$ будет уменьшаться, т.е. циклический разрыв будет увеличиваться. Следует отметить, что формула **(10.3)** справедлива для небольших изменений валового внутреннего продукта, так как в нее заложено линейное отклонение валового внутреннего продукта от числа работающих. При больших изменениях зависимость валового внутреннего продукта от числа работающих является нелинейной. Поэтому график функции Оукена часто представляют в виде кривой линии.

Массовая безработица является причиной роста социальной напряженности. Человек, потерявший работу, становится психологически неустойчивым и способным на негативные поступки. При этом повышаются смертность населения, число убийств и самоубийств, количество заболевших людей и количество заключенных в тюрьмы. Поэтому борьбе с массовой безработицей в цивилизованных странах уделяется самое пристальное внимание.

10.7. Инфляция и ее виды

Инфляция — это устойчивый и продолжительный рост общего уровня цен на товары, продающиеся в стране. При этом цены на разные товары растут неодинаково. На рис. 10.7 представлены индексы цен (нижняя кривая) и индексы курса доллара (верхняя кривая) в России в зависимости от времени.

За базовую дату принято 1 января 1990 г. В это время курс доллара соответствовал рублю, используемому на международном рынке. Показания на рис. 10.7 откладывались с интервалом в месяц. По оси ординат отложен индекс курса доллара и индекс цен. Индекс курса доллара — это отношение курса в исследуемый период к курсу в базисный период, т.е.

$$I_k = K_1 / K_0 ,$$

где K_1 — курс доллара в исследуемый момент; K_0 — курс доллара на базовую дату.

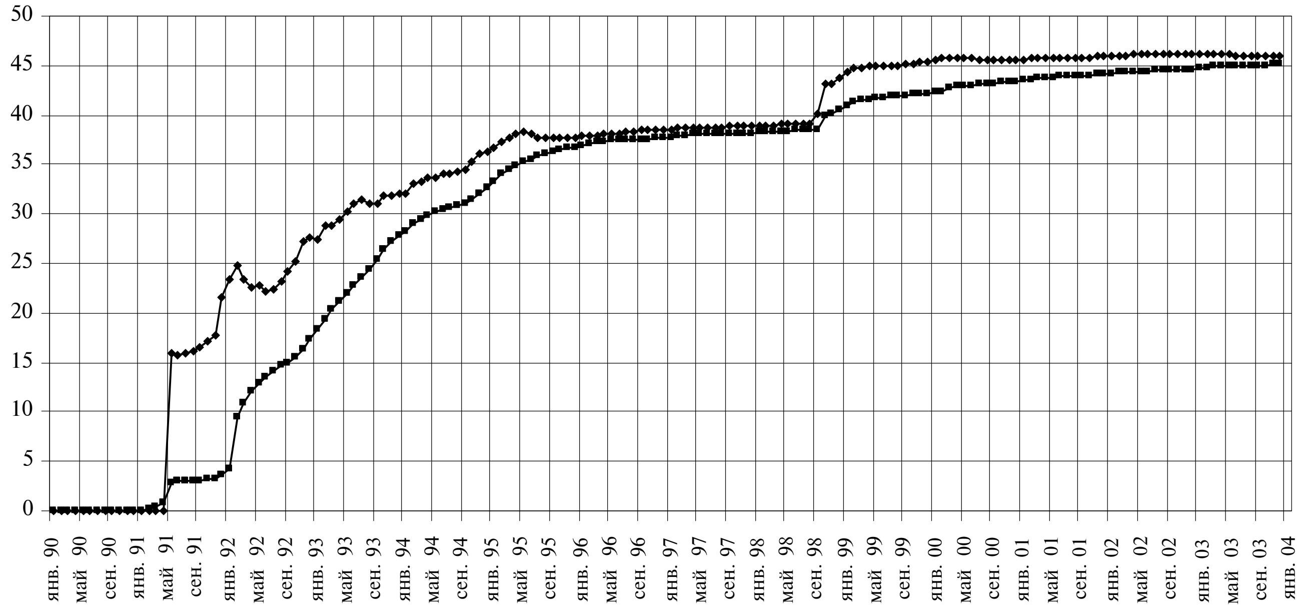


Рис. 10.7. **Индексы потребительских цен и курса доллара с базой на январь 1990 г.:**

— индекс курса доллара (логарифмический масштаб); — индекс цен (логарифмический масштаб)

Индекс цен I_p показывает, во сколько раз в среднем увеличились цены на заданную группу товаров за исследуемый период времени. Индекс цен в данном случае рассчитывался относительно базовой даты 1 января 1990 г. Индекс курса доллара и индекс цен отложены в логарифмическом масштабе, т.е. $10\lg\frac{K_1}{K_0}$, $10\lg I_p$. Данные по курсу доллара и индексу цен за 1990 г. и часть 1991 г. в доступной литературе отсутствуют. В самом начале реформ курс доллара резко подскочил вверх, а индекс цен изменялся медленнее. Затем ситуация изменилась на противоположную, т.е. индекс цен до ноября 1995 г. растет быстрее. Начиная с ноября 1995 г. и до августа 1998 г. значения курса доллара и индекса цен сравнялись относительно базового, и эти значения сравнительно медленно растут с одинаковой скоростью. Начиная с августа 1998 г. равновесие вновь было нарушено. С сентября 1998 г. до января 2000 г. индексы цен и курса доллара изменялись практически с постоянной скоростью, а их разность составляла 3 дБ, т.е. индекс курса доллара превышал примерно в 2 раза индекс цен (без учета инфляции доллара в США). Начиная с середины 2000 г. инфляция растет быстрее курса доллара, т.е. происходит постепенное выравнивание цен. Цены, начиная с января 1990 г. по январь 2004 г., возросли в $10^{4,6} = 40\,000$ раз.

В зависимости от темпов прироста цен различают три вида инфляции: умеренную (ползучую), галопирующую и гиперинфляцию.

При *умеренной инфляции* годовой темп прироста инфляции менее 10%. Покупательная способность денег, равная обратной величине от индекса цен, при умеренном темпе инфляции изменяется слабо. Поэтому краткосрочные контракты часто подписывают в номинальных ценах. Установленный темп прироста инфляции для стран ЕС не должен превышать 2,75% в год [2]. В США темп прироста инфляции составляет 2—4%. В России темп инфляции в последние годы равен 8—9% в год.

При *галопирующей инфляции* годовой темп прироста инфляции достигает 200%. При таких уровнях инфляции при подписании контрактов учитывается степень изменения стоимости денег во времени.

Гиперинфляция — инфляция, при которой темп прироста инфляции более 200% в год. Другое определение гиперинфляции утверждает, что при такой инфляции ее месячный темп прироста составляет 50%. Годовой темп прироста находят из соотношения:

$$(1+0,5)^{12} - 1 = 127,74, \quad \text{или} \quad 12\,774\%.$$

Во время такой инфляции происходит перераспределение богатств. Наблюдается недоверие к деньгам. Происходит возврат к бартеру.

В России, начиная с 1991 г. и заканчивая 2005 г., темп прироста инфляции иногда превышал умеренную. В 1992 г. темп прироста инфляции составил 860%, в 1993 г. — 820%, в 1994 г. — 210%.

Различают также ожидаемую и неожиданную инфляцию. *Ожидаемую инфляцию* закладывают в контракты, что позволяет уменьшить возможные потери. *Неожиданная инфляция* приводит к потере ожидаемых доходов.

Основными причинами инфляции является несбалансированность между совокупным спросом и совокупным предложением. Поэтому различают инфляцию спроса и инфляцию издержек. Но всегда инфляция возникает при превышении спроса над предложением.

Инфляция спроса возникает при устойчивом и продолжительном росте уровня цен, вызванным устойчивым и продолжительным превышением спроса над предложением. Инфляцию спроса часто относят к монетарному (денежному) явлению. В этом случае увеличение спроса связано с увеличением денежной массы. Рост денежной массы зависит от многих факторов, но чаще всего от политики государства, связанной с превышением расходов над доходами государственного бюджета. Такое превышение, в свою очередь, связано с большими военными расходами, расходами на содержание государственного аппарата, реализацией амбициозных проектов и т.д. Самый простой способ покрытия бюджетного дефицита — печатание денег.

Инфляция издержек связана с устойчивым и продолжительным ростом уровня цен, вызванным сокращением предложения из-за увеличения издержек производства. Причиной увеличения издержек может быть увеличение тарифов за электроэнергию, увеличение цен на энергоносители и т.д. Увеличение издержек приводит к увеличению цен на продукцию, а это, в свою очередь, на сокращение выпускаемой продукции.

10.8. Адаптивные и рациональные ожидания

Ожидания субъектов рынка существенным образом влияют на развитие инфляции. *Инфляционными ожиданиями* называют представления субъектов рынка о будущих темпах прироста инфляции. Инфляционные ожидания подразделяют на адаптивные и рациональные.

1. *Адаптивные* инфляционные ожидания позволяют прогнозировать инфляцию будущего периода при помощи метода, называемого экспоненциально взвешенным средним. Метод экспоненциально взвешенного среднего состоит в вычислении среднего уровня темпа прироста инфляции его прошлых значений при придании каждому последующему значению большего веса, чем предыдущему. Экспоненциально взвешенный средний темп прироста инфляции представим в виде:

$$\bar{H}_t = \alpha H_t + \alpha(1-\alpha)H_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2 H_{t-2} + \ldots + \alpha(1-\alpha)^j H_{t-j} + \ldots = \\ = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha(1-\alpha)^j H_{t-j},$$

где $\bar{H}_t$ — экспоненциально взвешенный средний темп прироста инфляции, прогнозируемый в периоде под номером t на период под номером $t+1$; H_{t-j} — значения темпа прироста инфляции в периоды $t,\ t-1,\ t-2, \ldots, t-n+1$ и т.д.; α — весовой коэффициент, или коэффициент адаптации, $0 < \alpha < 1$.

Заметим, что сумма ряда всех весов равна единице, т.е.

$$\alpha + \alpha(1-\alpha) + \alpha(1-\alpha)^2 + \ldots + \alpha(1-\alpha)^j \ldots = \alpha \frac{1}{1-(1-\alpha)} = 1,$$

так как эта сумма является бесконечной геометрической прогрессией со знаменателем $1-\alpha$.

Преобразуем формулу для экспоненциально взвешенного среднего к виду:

$$\bar{H}_t = \alpha H_t + (1-\alpha)\left[\alpha H_{t-1} + \alpha(1-\alpha)H_{t-2} + \alpha(1-\alpha)^2 H_{t-3} + \ldots\right].$$

Выражение в квадратных скобках является экспоненциально взвешенным средним для последнего периода в ряду параметров, т.е. это $\bar{y}_{t-1}$. Таким образом,

$$\bar{H}_t = \alpha H_t + (1-\alpha)\bar{H}_{t-1}. \tag{10.4}$$

Из этой формулы следует, что для построения прогноза достаточно задать величину $\bar{H}_{t-1}$. Ее можно получить, например, экспертным методом. Дальнейшее прогнозирование ведется по мере поступления свежих данных.

Значение коэффициента α выбирается исходя из конкретных условий. Для его выбора можно воспользоваться, например, данными табл. 10.1 [3].

Таблица 10.1

α	0,05	0,1	0,2	0,3
n	39	19	9	6

Чувствительность экспоненциально взвешенного среднего может быть изменена путем изменения α. Чем выше α, тем выше чувствительность; чем ниже α, тем устойчивее экспоненциально взвешенное среднее.

Перепишем формулу **(10.4)** для экспоненциально взвешенного среднего в виде:

$$\bar{H}_t = \bar{H}_{t-1} + \alpha(H_t - \bar{H}_{t-1}).$$

Разность $H_t - \bar{H}_{t-1} = \varepsilon_t$ является текущим значением ошибки прогноза. Тогда

$$\bar{H}_t = \bar{H}_{t-1} + \alpha\varepsilon_t.$$

Рассмотренный метод экспоненциально взвешенного среднего используется для прогнозирования стационарных процессов, при которых математическое ожидание параметра постоянно во времени.

▷ **Пример 10.3.** Даны данные по темпу прироста инфляции за 10 лет (табл. 10.2).

Дать прогноз на каждый следующий год, положив прогноз 1-го года равным 9, $\alpha = 0{,}2$.

Таблица 10.2

Год t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
H_t	8,9	9,1	8,9	9,08	8,96	8,9	9,0	9,5	9,6	9,56	

Р е ш е н и е. Результаты расчета сведены в табл. 10.3, в которой введены обозначения: $\bar{H}_{t-1}$ — прошлый прогноз текущего года; $\varepsilon_t = H_t - \bar{H}_{t-1}$ — ошибка текущего прогноза.

Таблица 10.3

Год t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
H_t	8,9	9,1	8,9	9,08	8,96	8,9	9,0	9,5	9,6	9,56	9,5
$\bar{H}_{t-1}$	9,0	8,98	9,0	8,98	9,0	8,99	8,97	8,97	9,09	9,19	9,26
$\varepsilon_t = H_t - \bar{H}_{t-1}$	−0,1	0,12	−0,1	0,1	−0,04	−0,09	0,03	0,51	0,51	0,37	0,24

◀

При прогнозировании процесса важно проводить контроль соответствия прогноза адекватности получаемых на практике результатов. Основным препятствием в построении рассматриваемых прогнозов служат внезапные скачки. Поэтому важнейшей задачей метода сглаживания ошибок является выявление этих скачков. После выявления скачка проводится анализ причин его возникновения, например, экспертным методом. Влияние скачка на точность прогноза демонстрируется на рис. 10.8.

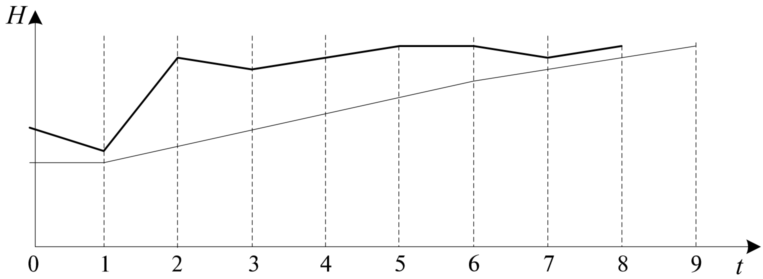


Рис. 10.8. **Влияние скачка на точность прогноза**

Существуют различные методы контроля адекватности прогноза и реальности. Один из них — метод автоматического контроля Грига [3]. Метод основан на вычислении следящего контрольного сигнала, указывающего с некоторым уровнем статистического доверия на степень неадекватности прогноза реальности. Для определения контрольного сигнала введем ряд понятий.

Средним абсолютным отклонением ошибки называется величина, вычисляемая по формуле

$$\Delta_t = \alpha\left|\varepsilon_t\right| + (1-\alpha)\Delta_{t-1}.$$

Величина $\Delta_t > 0.$ Естественно, что среднее абсолютное отклонение связано со среднеквадратичным отклонением ошибки σ_t. Приближенно можно считать, что

$$\sigma_t = 1,25\Delta_t.$$

Экспоненциально взвешенной ошибкой $\overline{\varepsilon}_t$ называется величина, определяемая формулой

$$\overline{\varepsilon}_t = \alpha\varepsilon_t + (1-\alpha)\overline{\varepsilon}_{t-1}.$$

Контрольный сигнал T_t находится из соотношения

$$T_t = \frac{\overline{\varepsilon}_t}{\Delta_t}.$$

Значение контрольного сигнала лежит в интервале

$$-1 < T_t < 1.$$

При отрицательном контрольном сигнале значение прогноза больше реального показателя, и наоборот.

Контрольный сигнал имеет определенные пороговые значения, соответствующие выбранному уровню доверия и представленные в табл. 10.4 [3].

Таблица 10.4

Уровень доверия	*Пороговые значения контрольного сигнала*				
	$\alpha = 0{,}1$	$\alpha = 0{,}2$	$\alpha = 0{,}3$	$\alpha = 0{,}4$	$\alpha = 0{,}5$
70	0,24	0,33	0,44	0,53	0,64
80	0,29	0,40	0,52	0,62	0,73
85	0,32	0,45	0,57	0,67	0,77
90	0,35	0,50	0,63	0,72	0,82
95	0,42	0,58	0,71	0,80	0,88
96	0,43	0,60	0,73	0,82	0,89
97	0,45	0,62	0,76	0,84	0,90
98	0,48	0,66	0,79	0,87	0,92
99	0,53	0,71	0,82	0,92	0,94
100	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00

Если при заданном α значение следящего контрольного сигнала стало больше указанного в табл. 10.4, то с указанным уровнем доверия прогностическая система становится неадекватной реальным изменениям показателя.

Недостатком концепции адаптивного инфляционного ожидания является требование к стационарности процесса. Инфляционный процесс по своей природе не стационарен. Поэтому ошибки прогнозирования могут быть существенными. Тем не менее адаптивные инфляционные ожидания позволяют хорошо прогнозировать темп прироста инфляции в периоды существования естественного уровня безработицы, когда динамический ряд этого темпа является стационарным.

2. *Рациональные* инфляционные ожидания представляют собой систему прогнозирования темпа прироста инфляции по целому ряду факторов, оказывающих влияние на этот темп. В общем случае формулу для прогнозирования записывают в виде:

$$H_{t+1} = F\left(x_j\right),$$

где H_{t+1} — значение темпа прироста инфляции для будущего периода под номером $t+1$, t — номер настоящего периода; F — оператор функции; x_j — факторы, определяющие будущую цену, или темп прироста инфляции, в периоде под номером $t+1$.

Число факторов, определяющих будущую цену, велико, и учесть их все невозможно. К таким факторам можно отнести, например, денежную эмиссию, процентную ставку, цену на энергоносители, изменения в законах и др.

Точность прогноза при использовании концепции рациональных инфляционных ожиданий зависит от количества учтенных ценообразующих факторов и от точности определения параметров этих факторов. При тщательной разработке модели эта точность может быть выше, чем точность, получаемая при использовании концепции адаптивного инфляционного ожидания.

Недостатком концепции рационального инфляционного ожидания являются трудности разработки моделей.

10.9. Инфляция и безработица — кривая Филлипса

Доказательство обратной зависимости между ставкой номинальной заработной платы и уровнем безработицы принадлежит О. Филлипсу, которое он опубликовал в 1957 г. [2]. Позднее эту зависимость стали представлять как темп прироста инфляции от уровня безработицы (рис. 10.9).

Полная занятость соответствует естественному уровню безработицы u^*. Если уровень фактической безработицы выше уровня полной занятости, то работники вряд ли потребуют увеличения заработной платы. Стабильная заработная плата никак не влияет на величину цен, а значит, и на темп прироста инфляции. По мере уменьшения реального уровня безработицы и приближения ее уровня к уровню полной занятости рабочие начинают выдвигать требования о повышении заработной платы и в некоторых случаях добиваются своей цели. Рост заработной платы приводит к росту цен на продукцию, а следовательно, к повышению темпа прироста инфляции. Снижение фактического уровня безработицы ниже уровня полной занятости приводит к росту инфляции по тем же причинам.

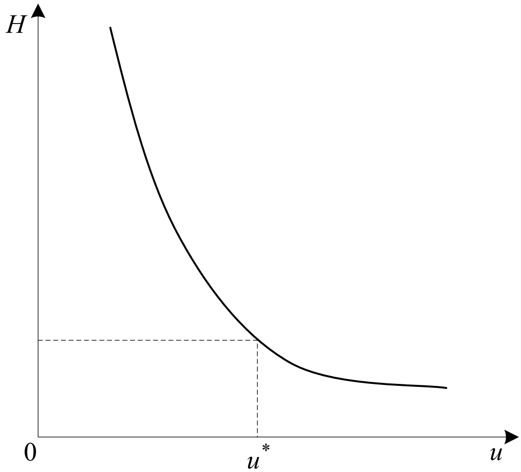


Рис. 10.9. **Кривая Филлипса**

Во время разрушительного кризиса 1973—1974 гг. исследователи обнаружили зависимость, противоположную представленной на рис. 10.9. Во время этого кризиса уровень фактической безработицы повышался с повышением темпа прироста инфляции. Это явление получило название *стагфляции*. Объяснение этого отклонения дали М. Фридмен и Э. Фелпс. Для исследования стагфляции рассмотрим приближенную формулу для функции Филлипса, предназначенную для краткосрочного периода. Эта формула имеет вид:

$$H_t = H_t^e - \gamma\left(u - u^*\right) + \varepsilon, \qquad \textbf{(10.5)}$$

где H_t — фактический темп прироста инфляции в период под номером t; H_t^e — прогнозируемый темп прироста инфляции в период под номером t; γ — реакция инфляции на уровень безработицы; u — фактический уровень безработицы; u^* — естественный уровень безработицы; ε — шоковые изменения совокупного предложения.

Шоковые изменения совокупного предложения, которые и определяют повышение темпа прироста инфляции одновременно с повышением уровня фактической безработицы, наблюдались во время кризиса 1973—1974 гг. Они были вызваны согласованными действиями международного нефтяного картеля ОПЕК, повысившего цены на нефть, и сместили кривую Филлипса вправо, вызвав стагфляцию. Рассмотрим этот процесс подробнее [2].

В соответствии с формулой **(10.5)** графиком функции Филлипса для краткосрочных периодов является прямая линия. Эти линии представлены на рис. 10.10 в виде наклонных.

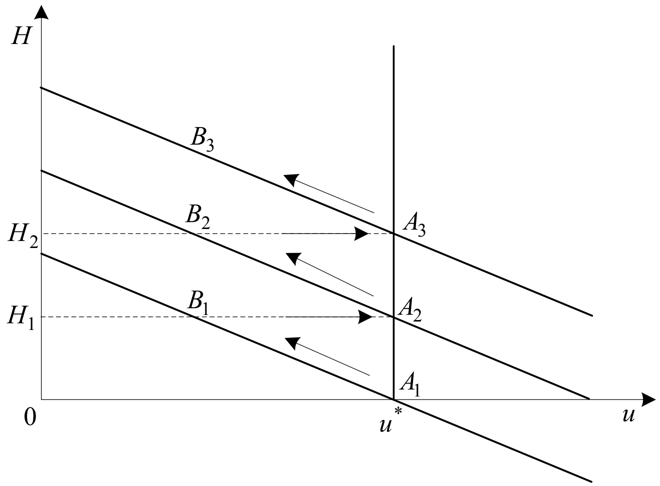


Рис. 10.10. **Графики функции Филлипса для краткосрочных и долгосрочных периодов**

Рассмотрим действие механизма адаптивных инфляционных ожиданий. Самая нижняя краткосрочная прямая Филлипса пересекает ось в точке естественного равновесия u^*. В этой точке темп прироста инфляции равен нулю. Считают [2], что на всей линии ожидаемый темп прироста инфляции также равен нулю. Пусть правительство полагает, что уровень безработицы, равный u^*, слишком велик. Поэтому его политика будет направлена на снижение безработицы. Для этого оно стимулирует кредитно-денежную политику, увеличивая тем самым спрос. В результате увеличения спроса безработица уменьшается, и экономика перемещается из точки A_1 в точку B_1. Это связано с тем, что предприниматели повышают номинальную заработную плату для привлечения дополнительных работников. Рабочие воспринимают это повышение как реальное, т.е. имеет место «денежная иллюзия». На самом деле в точке B_1 цены будут выше, так как темп прироста инфляции при переходе в эту точку составил величину, равную H_1. Поэтому реальная заработная плата не изменилась. Находясь некоторое время в точке B_1, рабочие и предприниматели осознают инфляционные эффекты. «Денежная иллюзия» развеялась.

Осознав снижение спроса на продукцию и падение своей прибыли, предприниматели начнут сокращать производство. Это приведет к падению спроса на труд. Безработица вернется к естественному уровню. График функции Филлипса подскочит вверх и займет среднее положение на рис. 10.10. Экономика будет находиться в точке A_2. В этой точке инфляционное ожидание будет равно уже темпу прироста инфляции H_1. Если правительство вновь захочет сократить уровень безработицы, то процесс повторится. Экономика переместиться в точку B_2, а затем в точку A_3 и т.д.

В соответствии с теорией рациональных ожиданий, предложенной новыми классиками, к числу которых относится американский экономист Р. Лукас, связь темпа прироста инфляции с уровнем безработицы реализуется иначе, чем рассмотрено выше. Эта теория утверждает, что рабочие и предприниматели лишены иллюзий. Они легко могут отличить относительный уровень цен от абсолютного. Рабочие номинальное повышение цены сопоставляют с инфляцией и не увеличивают предложение труда. Предприниматели связывают повышение спроса на их продукцию с повышением цен и не расширяют производство. То есть и те и другие понимают, как функционирует экономика. Отсюда следует, что при стимулировании кредитно-денежной политики правительством действия агентов рынка будут направлены на ликвидацию ее негативных последствий. Поэтому никакого снижения уровня занятости не будет. Линия Филлипса скачком переместится из нижнего положения в среднее (см. рис. 10.10). То есть экономика последовательно переходит из точки A_1 в точку A_2, затем в точку A_3 и т.д. Таким образом, линией Филлипса будет прямая линия, перпендикулярная оси $0u$. Эта линия называется *долгосрочной линией Филлипса*.

Теории адаптивных и рациональных инфляционных ожиданий предполагают, что вмешательство государства в рыночную экономику приводит к негативным последствиям. Однако эти выводы сторонников монетаризма и новых классиков не убедили государственных деятелей стран с рыночной экономикой отказаться от стабилизационной политики в регулировании экономики. Вопросы борьбы с циклической безработицей и высокими темпами прироста инфляции остаются важнейшими целями государственных органов.

10.10. Антиинфляционная политика

Основным условием возникновения инфляции является ускорение темпа прироста количества денег, находящихся в обращении. Поэтому для уменьшения темпов прироста инфляции необходимо сокращать этот темп прироста денег. Делается это либо путем регулирования совокупного спроса, либо путем регулирования совокупного предложения. Известны два подхода к регулированию инфляции: *кейнсианский* и *монетаристский*.

1. Сторонники теории Кейнса предлагают увеличить уровень совокупного предложения за счет создания эффективного спроса, который формируется государственным заказом и уменьшением величины процентной ставки, т.е. удешевлением кредита. Это приводит к уменьшению спада и сокращению безработицы и в конечном счете к сокращению темпов прироста инфляции. Однако затраты государства на реализацию своих заказов приводят к созданию дефицита государственного бюджета, который не может быть покрыт дополнительной эмиссией денег. Кейнс предлагает покрывать этот дефицит посредством долгосрочных государственных займов.

2. В ряде стран увеличение государственного долга при борьбе с инфляцией заставило по-другому взглянуть на проблему М. Фридмена, основоположника монетаристского направления антиинфляционной политики. Монетаристы предлагают не увеличивать уровень совокупного предложения, как Кейнс, а уменьшать его. Сокращение совокупного спроса можно провести путем проведения денежной конфискационной реформы. При этом резко или постепенно сокращается денежная масса в стране, что приводит к уменьшению спроса. Для сокращения бюджетного дефицита уменьшаются расходы на реализацию социальных программ, увеличивается процентная ставка, т.е. удорожается кредит.

Подход, при котором резко сокращается денежная масса, получил название «*метод шоковой терапии*». Использование этого метода приводит к росту безработицы и продолжительному спаду производства, резкому снижению уровня жизни населения, социальным обострениям. Иногда этот метод дает неплохой результат, как, например, в Польше в 1990—1992 гг.

При постепенном снижении денежной массы (*метод градуирования*) ее уменьшение происходит многократно, но каждый раз незначительно. Такой метод может вызвать инфляционную инерцию. Эта инерция увеличивается за счет индексации доходов, когда заработная плата и контракты защищены от общего уровня цен. Рекомендуется применять метод градуирования при темпах прироста инфляции не более 20—30% в год.

Помимо рассмотренных кейнсианского и монетаристского подходов к регулированию инфляции рассматривают *метод политики регулирования цен и доходов*. При этом правительство может заморозить цены и номинальную заработную плату или ограничить увеличение заработной платы увеличением производительности труда. Повышение цен при этом ограничивается повышением заработной платы. Опыт проведения этой политики в западных странах оказался неудачным.

Некоторые авторы считают [1, 4], что для предотвращения инфляции необходимы скоординированные действия правительства и частного сектора экономики. Правительству при этом следует стабилизировать государственные расходы и налоговую систему, обеспечить увеличение одинаковыми темпами денежной массы и национального дохода, не допускать в свою страну импорта инфляции из стран, с которыми установлен деловой товарообмен. Предпринимателям и рабочим нужно обеспечить темпы увеличения заработной платы, не превышающие темпы увеличения производительности труда.

Упражнения

Задача 10.1. В стране в исследуемом году насчитывается 80 млн чел. работающих, 8 млн — безработных, уволено 9 млн чел., принято на работу 10 млн чел.

Определить уровень безработицы, долю потерявших работу и долю устроившихся на работу.

Задача 10.2. Естественный уровень безработицы равен 6%, а фактический — 8%. Разрыв ВВП в относительных единицах составляет 4%.

Определить коэффициент Оукена.

Задача 10.3. Используя данные примера 10.3, определить контрольный сигнал для каждого года. При этом положить экспоненциально взвешенную ошибку года, стоящего перед 1-м годом, равной нулю, т.е. $\overline{\varepsilon}_0 = 0$, а среднее абсолютное отклонение года, стоящего перед 1-м годом, $\Delta_0 = 0,08$.

Библиографический список

1. *Вечканов Г.С.*, *Вечканова Г.Р.* Макроэкономика. М.: Питер, 2006.
2. *Киселева Е.А.* Макроэкономика. М.: Эксмо, 2007.
3. *Льюис К.Д.* Методы прогнозирования экономических показателей. М.: Финансы и статистика, 1986.
4. *Тарасевич Л.С.*, *Гребенников П.И.*, *Леусский А.И.* Макроэкономика. М.: Высшее образование, 2007.
5. *Экономическая* теория / Под ред. В.И. Видяпина и др. М.: ИНФРА-М, 2000.

Часть III

Фондовый рынок

Глава 11

Рынок ценных бумаг и его инструменты

11.1. Понятие рынка ценных бумаг

Целью рынка ценных бумаг (фондового рынка) является распределение денежных средств между участниками экономических отношений за счет выпуска и обращения ценных бумаг [1—3]. Фондовый рынок мобилизует средства вкладчиков и направляет их туда, где они могут дать наибольшую отдачу. Это происходит само собой, так как соответствует интересам отдельных участников фондового рынка.

Юридическое лицо, выпускающее ценные бумаги, называется *эмитентом*, а выпуск бумаг — *эмиссией*.

По организационной структуре фондовый рынок делится на первичный и вторичный.

На *первичном рынке* происходит первичное размещение ценных бумаг сразу после их эмиссии. Причем ценные бумаги продаются и покупаются здесь крупными пакетами.

Вторичный рынок — это рынок, на котором происходит продажа и покупка ценных бумаг постоянно. Как правило, такая торговля осуществляется на бирже. Отсутствие вторичного рынка оттолкнуло бы инвестора от покупки ценных бумаг, так как такие бумаги в этом случае становятся неликвидными. Без финансового рынка многие предприятия остались бы без финансовой поддержки.

Фондовый рынок делится также на спотовый и срочный.

Если сделки заключаются на немедленную поставку актива, то их называют *кассовыми*, или *спотовыми*. Рынок таких сделок называется кассовым (спотовым), а цена в результате заключения этих сделок называется кассовой (спотовой). На спотовом рынке происходит одновременная оплата и поставка ценных бумаг.

Если сделки заключаются на поставку актива в будущем, то их называют *срочными*. В срочном контракте оговариваются все условия соглашения. Срочный рынок — это рынок, на котором заключаются срочные сделки.

11.2. Анализ характеристик ценных бумаг

Различные методы анализа позволяют определить характеристики ценных бумаг, их динамику и принять правильное инвестиционное решение. На Западе интенсивное развитие анализа ценных бумаг началось после выхода книги американских ученых Б. Грэхема и Д.Л. Додда «Анализ ценных бумаг» («Security Analysis») в 1934 г. Книга посвящена исследованию фондового рынка и ценных бумаг. Развитие исследований характеристик ценных бумаг привело к формированию таких научных школ, как технический анализ и фундаментальный анализ. До 1970-х гг. эти школы развивались параллельно. Начиная с середины 1970-х гг. начинается взаимное использование научных результатов этих школ.

11.2.1. Технический анализ

Сторонники школы технического анализа основой анализа характеристик ценных бумаг считают динамику их биржевых курсов [1]. При этом предполагается, что вся необходимая информация о финансовом состоянии корпорации отражается в этих биржевых курсах. Техническая школа занимается прежде всего изучением рынка ценных бумаг, спросом и предложением на эти ценные бумаги. На основе анализа биржевых курсов строятся модели цен различных ценных бумаг, по которым делаются прогнозы на будущее и даются рекомендации о принятии того или иного инвестиционного решения.

Классический технический анализ предусматривает прежде всего построение системы графиков цен, спроса и предложения (объема продаж) в зависимости от времени.

Пример графика, построенного в ежедневном масштабе, представлен на рис. 11.1, где показана зависимость курса доллара от времени. При помощи графика можно изображать временны́е зависимости цены, объемы сделок и т.д.

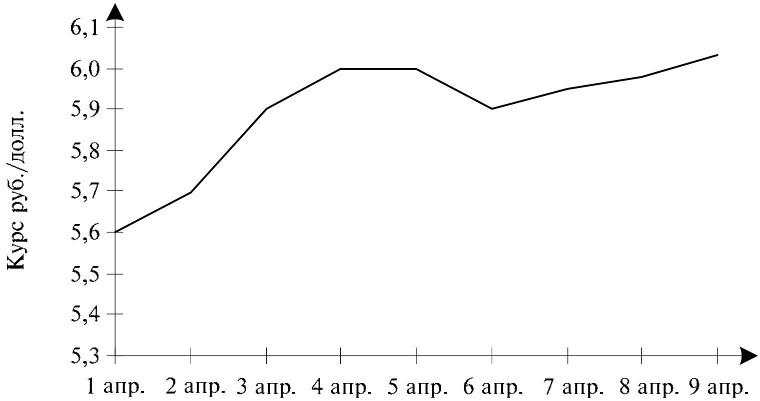


Рис. 11.1. **Пример графика курсов**

Зависимость цены акции или другой ценной бумаги можно представить также при помощи гистограмм (рис. 11.2) или японских свеч (рис. 11.3).

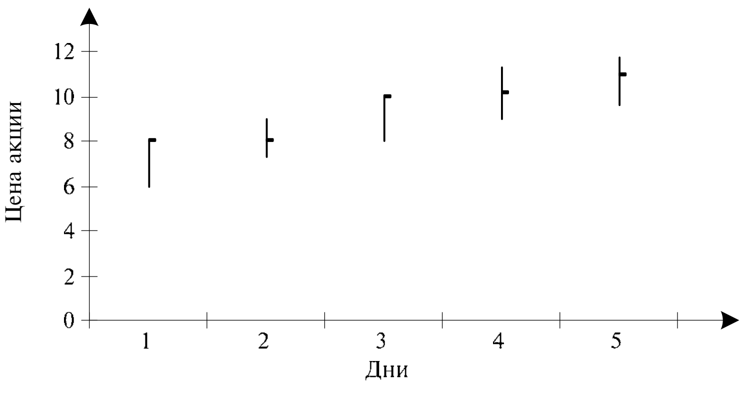


Рис. 11.2. **Гистограмма цены акции**

Верхняя и нижняя координаты каждого столбика обозначают высшую и низшую цену за рассматриваемый период. Отросточек справа обозначает цену закрытия. Если на графике представлен также отросточек слева, то он обозначает цену открытия.

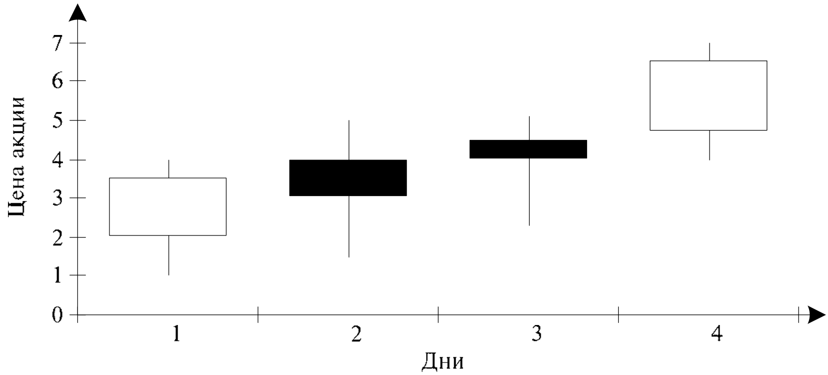


Рис. 11.3. **Представление цены акции при помощи японских свеч**

Прямоугольник называется телом свечи, вертикальные отрезки прямых сверху и снизу — тенями. Верхняя и нижняя координаты теней обозначают высшую и низшую цену за рассматриваемый период. Верхняя координата белого тела обозначает цену закрытия, нижняя координата — цену открытия, а верхняя координата черного тела обозначает цену открытия, нижняя координата — цену закрытия.

Тенденцией называется ломаная линия, проведенная через точки, соответствующие ценам закрытия. При этом получается осциллирующая функция, у которой на медленные изменения накладываются быстрые колебания (рис. 11.4).

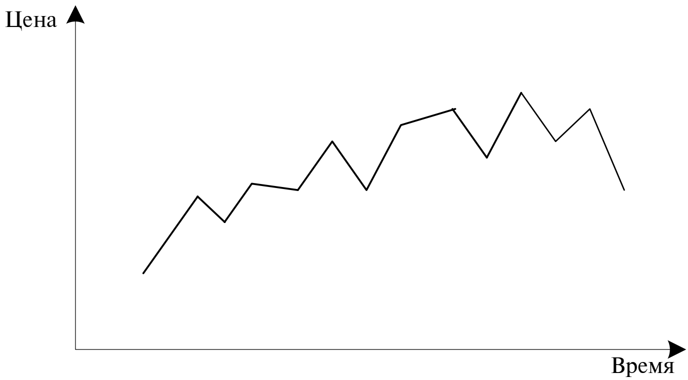


Рис 11.4. **Тенденция**

Ценовой тренд — это отрезок прямой, показывающий направление движения цен. Движение цен на бирже диктуется спросом и предложением. Если спрос превышает предложение, то цены растут, и наоборот. Различают следующие типы трендов:

а) бычий — цена возрастает во времени (рис. 11.5);

б) медвежий — цена падает во времени (рис. 11.6);

в) боковой — цена колеблется относительно постоянного значения.

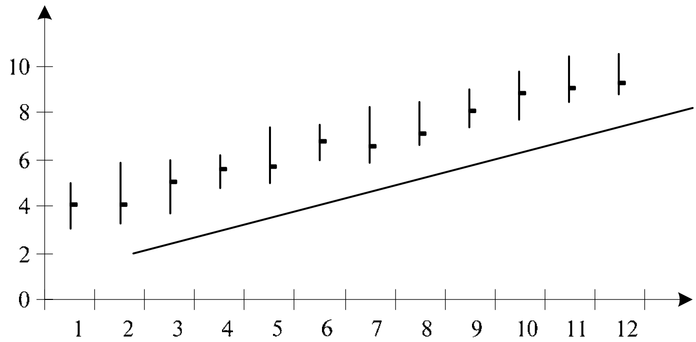


Рис. 11.5. **Бычий тренд**

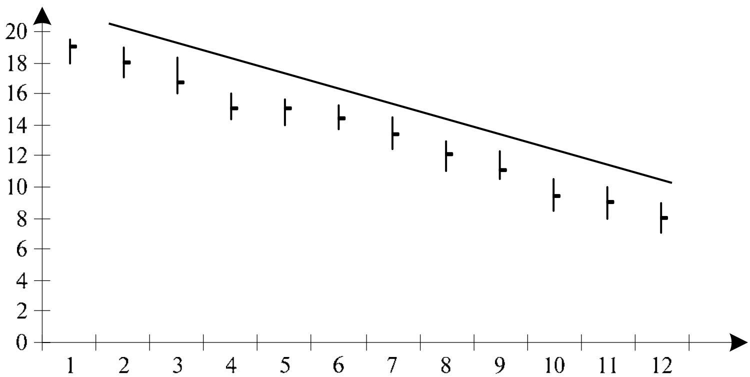


Рис. 11.6. **Медвежий тренд**

Сложность при построении тренда заключается в выборе точек, через которые проводится линия. Подробные и оригинальные методы построения особых точек для проведения линии тренда рассмотрены в [1]. Автор этой книги Т.Р. Демарк пользуется, в основном, дневными графиками цен. Он предлагает строить линии трендов не слева направо, а, наоборот — справа налево, так как движение цен в настоящий момент гораздо важнее, чем движение рынка в прошлом.

Помимо тренда технический анализ использует ряд других широко используемых на фондовом рынке методов. К ним прежде всего относятся:

- скользящие средние;
- осцилляторы;
- волновая теория Элиота;
- теория циклов;
- коррекции.

11.2.2. Фундаментальный анализ

Для определения действительной цены акции сторонники школы фундаментального анализа проводят следующие работы:

- изучают балансы, отчеты о прибылях и убытках и другие финансовые документы, публикуемые корпорациями;
- анализируют состояния рынков, на которые данная компания выходит со своей продукцией;
- сравнивают рыночные цены акций с их действительной стоимостью;
- принимают инвестиционные решения о покупке или продаже акций.

Основная идея фундаментального анализа состоит также в вычислении некоторых показателей предприятия, характеризующих его платежеспособность и финансовую устойчивость. К числу таких показателей относятся коэффициенты ликвидности, деловой активности, устойчивости, рентабельности, инвестиционные коэффициенты.

Для определения основных факторов, отражающих текущее состояние предприятия, рассмотрим формулу для современной цены акции. Цена акции определяется двумя факторами. Во-первых, в цену акции входит часть капитала предприятия, равная $\frac{K_0}{N}$, где K_0 — капитал предприятия на момент оценки, N — количество обыкновенных акций. Во-вторых, цена акции предприятия во многом зависит от его дивидендной политики и альтернативной доходности капитала. Под *альтернативной доходностью* понимают доходность, которую инвестор может получить, вкладывая свой капитал в другие финансовые операции. Таким образом, при разработке формулы для цены акции следует учесть современную стоимость всех будущих дивидендов.

Пусть дивиденды выплачиваются раз в году, доходность капитала предприятия составляет a_k, современный капитал предприятия равен K_0. Чистая прибыль предприятия за первый период будет равна:

$$\Pi_1 = a_k K_0.$$

Если долю чистой прибыли, выделяемой на дивиденды (дивидендная политика предприятия), обозначить через $g\Pi_1$, а количество обыкновенных акций через N, то на каждую акцию приходится:

$$d_1 = \frac{g a_k K_0}{N}.$$

После выплаты дивидендов в конце первого периода капитал фирмы составит:

$$K_1 = K_0 + (1-g)\Pi_1 = K_0\left[1+(1-g)a_k\right].$$

Будем считать, что продуктивность капитала предприятия и его дивидендная политика не меняются. Тогда его прибыль за второй период будет равна:

$$\Pi_2 = a_k K_1.$$

Дивиденд на каждую акцию к концу второго периода:

$$d_2 = \frac{g\Pi_2}{N} = \frac{g a_k K_0}{N}\left[1+(1-g)a_k\right].$$

Капитал в конце второго периода:

$$K_2 = K_1 + (1-g)\Pi_2 = K_1\left[1+(1-g)a_k\right] = K_0\left[1+(1-g)a_k\right]^2.$$

Для третьего периода имеем:

$$\Pi_3 = \frac{j_k}{m}K_2;\quad d_3 = \frac{g\Pi_3}{N} = \frac{g a_k K_0}{N}\left[1+(1-g)a_k\right]^2.$$

Для произвольного периода под номером t имеем:

$$d_t = \frac{g a_k K_0}{N}\left[1+(1-g)a_k\right]^{t-1},\quad K_t = K_0\left[1+(1-g)a_k\right]^{t}.$$

Современная стоимость всех будущих дивидендов, дисконтированных по альтернативной ставке, определяется по формуле

$$A_d = \sum_{t=1}^{n}\frac{d_t}{(1+a)^t},$$

где n — срок существования бизнеса; a — альтернативная процентная ставка, по которой владелец акций сможет разместить свой капитал.

Эта ставка является альтернативной ставке a_k, выражающей доходность капитала исследуемого предприятия. Подставив сюда формулу для дивиденда, получаемого в произвольный период под номером t, получим соотношение для расчета цены акции:

$$A_d = \sum_{t=1}^{n} \frac{g a_k K_0}{N(1+a)} \left[\frac{1+(1-g)a_k}{1+a} \right]^{t-1} = \frac{g a_k K_0}{N(1+a)} \frac{\left[\frac{1+(1-g)a_k}{1+a} \right]^{n} - 1}{\frac{1+(1-g)a_k}{1+a} - 1} =$$

$$= \frac{K_0}{N} \cdot g \cdot \frac{1 - \left[\frac{1+(1-g)a_k}{1+a} \right]^{n}}{g + \frac{a}{a_k} - 1}.$$

Таким образом, цена акции определяется соотношением

$$A = \frac{K_0}{N} + A_d = \frac{K_0}{N} + \frac{K_0}{N} \cdot g \cdot \frac{1 - \left[\frac{1+(1-g)a_k}{1+a} \right]^{n}}{g + \frac{a}{a_k} - 1} =$$

$$= \frac{K_0}{N} \left(1 + g \cdot \frac{1 - \left[\frac{1+(1-g)a_k}{1+a} \right]^{n}}{g + \frac{a}{a_k} - 1} \right).$$

Как следует из этой формулы, цена акции будет зависеть от отношения ставок a_k и a, а также от доли чистой прибыли, направляемой на дивиденды g. Рассмотрим три случая: $a_k > a$, $a_k = a$ и $a_k < a$. Для первого случая в формуле для цены акции знаменатель дроби может быть как положительный, так и отрицательный. Для третьего случая этот знаменатель всегда положительный. При выполнении равенства $a_k = a$ формула для цены акции приобретает вид:

$$A = \frac{K_0}{N} \cdot \left(2 - \left[\frac{1+(1-g)a_k}{1+a_k} \right]^{n} \right).$$

▷ **Пример 11.1.** Собственный капитал предприятия составляет 10 млн руб., количество обыкновенных акций равно 10 млн шт. Предполагается, что доходность капитала предприятия составит 15% годовых. Срок существования бизнеса — 10 лет (100 лет). Построить графики цены акции от доли дивидендов, выделяемых из чистой прибыли, для следующих альтернативных процентных ставок: 1) $a = 12\%$; 2) $a = 15\%$; 3) $a = 18\%$.

Р е ш е н и е. Для альтернативной ставки, равной 12% годовых, формула для цены акции приобретает вид:

$$A = \frac{K_0}{N}\left(1 + g\cdot\frac{1-\left[\frac{1+(1-g)a_k}{1+a}\right]^n}{g+\frac{a}{a_k}-1}\right) = 1 + g\cdot\frac{1-\left[\frac{1+(1-g)0{,}15}{1+0{,}12}\right]^{10}}{g-0{,}2}.$$

Для альтернативной ставки, равной 15% годовых, получим следующую формулу для цены акции:

$$A = \frac{K_0}{N}\cdot\left(2-\left[\frac{1+(1-g)a_k}{1+a_k}\right]^n\right) = 2-\left[\frac{1+(1-g)0{,}15}{1{,}15}\right]^{10}.$$

Для альтернативной ставки, равной 18% годовых, формулу для цены акции запишем в виде:

$$A = \frac{K_0}{N}\left(1 + g\cdot\frac{1-\left[\frac{1+(1-g)a_k}{1+a}\right]^n}{g+\frac{a}{a_k}-1}\right) = 1 + g\cdot\frac{1-\left[\frac{1+(1-g)0{,}15}{1+0{,}18}\right]^{10}}{g+0{,}2}.$$

На рис. 11.7 приведены графики для всех альтернативных ставок при сроке существования бизнеса 10 лет. Верхний график соответствует альтернативной ставке $a = 12\%$, средний график — $a = 15\%$, а нижний — $a = 18\%$. Таким образом, чем выше альтернативная ставка, тем ниже цена акции.

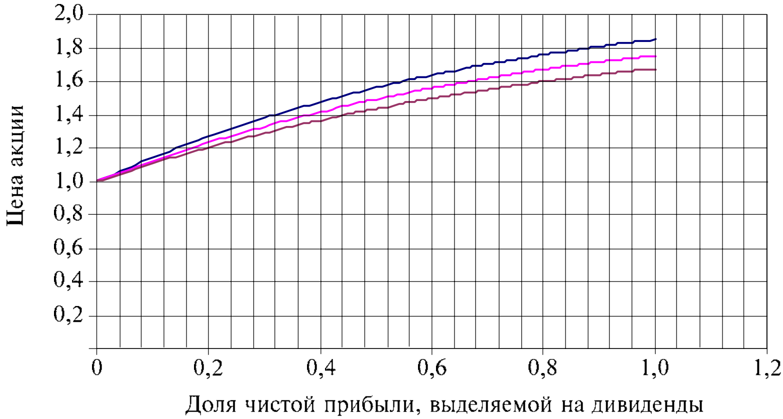


Рис. 11.7. **Зависимость цены акции от доли чистой прибыли, *n* = 10 лет**

На рис. 11.8 представлено семейство графиков для срока существования бизнеса 100 лет. Их расположение в зависимости от величины альтернативной ставки то же, что и в предыдущем случае.

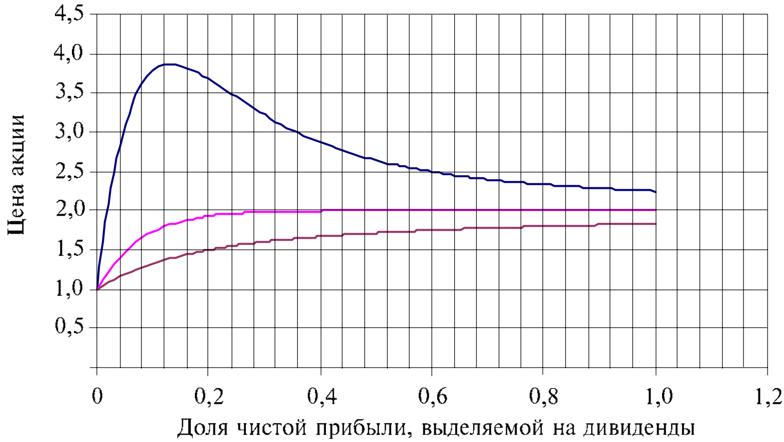


Рис. 11.8. **Зависимость цены акций от доли чистой прибыли, *n* = 100 лет**

Из графика для альтернативной ставки 12% годовых следует, что при доле чистой прибыли, идущей на дивиденды и равной 13%, стоимость акции становится максимальной и равной 3,865 руб. Другими словами, рыночная цена акции превысила стоимость части капитала предприятия на одну акцию, соответствующую моменту оценки, в 3,865 раз. ◀

Анализ результатов рассмотренного примера позволяет предположить, что существует доля чистой прибыли, выделяемой на дивиденды, при которой цена акции будет иметь максимальное значение. Причем этот максимум возможен только при превышении доходности собственного капитала бизнеса над альтернативной доходностью и при больших сроках существования этого бизнеса.

11.3. Риск и ограничение риска

Инвестиционный риск на фондовом рынке связан с возможным обесцениванием портфеля ценных бумаг.

Финансовая операция называется *рискованной*, если ее доходность не известна в момент заключения сделки. Это может быть связано, например, с финансовой несостоятельностью должника и его неспособностью вернуть долги, с изменением курсовой стоимости ценных бумаг и т.д.

Риск на фондовом рынке подразделяют на системный и диверсифицируемый.

Системный риск связан с падением всех обращающихся на фондовом рынке ценных бумаг. Возможные потери из-за системного риска связаны с инфляцией, кризисами, законодательными изменениями и т.д. Системный риск не диверсифицируется.

Диверсифицируемый риск связан с особенностями каждой ценной бумаги. Это позволяет, например, снижать риск за счет формирования портфеля ценных бумаг, доходности которых слабо коррелированны.

При оценке риска инвестор принимает решения, проводя сравнение прогноза эффективности с эффективностью безрискового вклада.

11.3.1. Хеджирование

Использование инвестором методов, позволяющих исключить или ограничить риск финансовых операций, называется *хеджированием*. В качестве примера рассмотрим снижение риска при помощи страхования. Пусть инвестор имеет сумму P руб., часть из которой, равную P_1 руб., он представляет в долг другому лицу по сложной процентной ставке $i\%$ годовых. Оставшуюся часть, равную $P-P_1$, инвестор расходует на покупку страхового полиса, гарантирующего выплату в случае неплатежеспособности должника с коэффициентом q страхового возмещения цены полиса. В том случае, если инвестор получит наращенную сумму долга, доходность вклада за весь срок ссуды будет зависеть от полученной суммы без затраченной суммы P, т.е.

$$a_1 = \frac{(1+i)^n P_1 - P}{P} = (1+i)^n \frac{P_1}{P} - 1,$$

где n — срок ссуды.

Если же должник окажется несостоятельным, то эффективность вклада за весь срок ссуды будет зависеть от суммы, полученной от страховой компании, без затраченной суммы P, т.е.

$$a_2 = \frac{q(P - P_1) - P}{P} = q - q\frac{P_1}{P} - 1.$$

Такой подход хеджирования полностью исключает риск, если окажется состоятельным либо должник, либо страховое общество. Для того чтобы эффективность первого и второго вариантов были равными, надо положить $a_1 = a_2 = a.$ Подставляя сюда полученные выше значения для a_1 и a_2 и решая уравнение, найдем

$$\frac{P_1}{P} = \frac{q}{(1+i)^n + q}.$$

Для снижения риска портфельных инвестиций используются также производные финансовые инструменты, к числу которых относятся форвардные, фьючерсные и опционные контракты.

▷ **Пример 11.2.** Инвестор вкладывает деньги по сложной процентной ставке 20% годовых на срок, равный одному году. Коэффициент страхового возмещения цены полиса составляет $q = 20$.

Определить, какую часть имеющихся денег инвестор должен потратить на приобретение страхового полиса, а также доходность операции за весь срок ссуды.

Р е ш е н и е. Подставим данные примера в формулу

$$\frac{P_1}{P} = \frac{q}{(1+i)^n + q} = \frac{20}{1 + 0,2 + 20} = 0,94339622.$$

Часть денег, потраченных на приобретение страхового полиса, равна:

$$1 - \frac{P_1}{P} = 1 - 0,94339622 = 0,0566038\text{, или } \approx 5,66\%.$$

Доходность операции

$$a = (1+i)^n \frac{P_1}{P} - 1 = 1{,}2 \cdot 0{,}94339622 - 1 = 0{,}1132 \text{, или } 13{,}2\%.$$

Полученные результаты показывают, что хеджирование, повышая надежность, снижает доходность (в рассматриваемом примере с 20 до 13,2%). ◄

11.3.2. Мера риска

Обычно доходность ценной бумаги, определяемая некоторой процентной ставкой, является реализацией случайной величины доходности. Это связано с тем, что будущая цена этой ценной бумаги неизвестна, т.е. является случайной величиной. Поэтому эффективность ценной бумаги описывается некоторыми моментами случайной доходности, а именно:

- математическим ожиданием;
- дисперсией;
- стандартным (средним квадратичным) отклонением;
- ковариацией случайных доходностей двух ценных бумаг;
- коэффициентом корреляции.

Мерой риска доходности ценной бумаги служит среднее квадратичное отклонение.

▷ **Пример 11.3.** Сравнить проекты по степени риска:
1) $a_1 = a_2$; $\sigma_1 > \sigma_2$; 2) $a_1 > a_2$; $\sigma_1 = \sigma_2$; 3) $a_1 > a_2$; $\sigma_1 > \sigma_2$.

Р е ш е н и е: 1) выбираем проект a_2; σ_2, так как его ожидаемый доход равен ожидаемому доходу первого проекта, а риск меньше;
2) выбираем проект a_1; σ_1, так как его ожидаемый доход больше ожидаемого дохода второго проекта при равных рисках;
3) выбор зависит от склонности инвестора к риску. ◄

11.4. Индексы деловой активности

Индексы деловой активности используются для изучения ситуации в реальном секторе экономики и на фондовом рынке. В качестве таких индексов используются средние величины. Каждый индекс характеризуется:

- совокупностью компаний, рыночные цены акций которых входят в расчет индекса;

- методом усреднения;
- видом весов при применении взвешенной средней;
- начальным значением индекса, т.е. его значением в базисном году.

При формировании совокупности компаний учитывается торговая активность по данной акции, репрезентативность и надежность предприятия. Торговая активность определяется по среднему количеству совершенных сделок за торговый день в течение длительного периода времени. Репрезентативность предполагает вхождение в совокупность тех предприятий, которые представляют основные отрасли экономики, а цены на акции этих предприятий отражают колебания цен в этих отраслях или рынка в целом.

При усреднении может быть использован метод арифметической или геометрической средней. Усреднение может быть простое и взвешенное.

В качестве веса может быть использовано, например, количество акций данного предприятия, находящихся в обращении.

Начальное значение индекса выбирается из удобства пользования этим индексом. Для этих целей выбирается, как правило, круглое число, например, 10, 50, 100 и т.д.

Примером индекса, рассчитанного по простой арифметической средней является промышленный индекс Доу-Джонса (DJIA — Dow Jones Industrial Average), публикуемый с 1898 г. Совокупность компаний для этого индекса равна 30. Все эти компании котируются на Нью-Йоркской фондовой бирже. За время действия этого индекса совокупность компаний существенно изменялась: с 12 в 1898 г. до 30 в 1928 г. Компании, подвергшиеся реорганизации или банкротству, а также компании, торговая активность которых существенно снижалась, заменялись компаниями с высокой торговой активностью. Методика расчета этого индекса соблюдает условие сопоставимости индексов при изменении совокупности компаний. С самого начала при совокупности компаний, равной n, индекс Доу-Джонса рассчитывается по формуле

$$I_{DJIA} = \frac{\sum_{k=1}^{n} p_k}{n},$$

где $k = 1, 2, ..., n$, n — количество компаний совокупности; p_k — цена акции компании под номером k в начальный момент времени.

Для любого другого момента времени после начального и до первого изменения совокупности компаний индекс Доу-Джонса будет определяться этой формулой. Для момента первого изменения совокупности формулу перепишем в виде:

$$I_{DJIA,1} = \frac{\sum_{k=1}^{n} p_{k,1}}{n}.$$

Рассматриваемая временна́я граница принадлежит как первому интервалу времени от начального момента до первого изменения совокупности компаний, так и второму интервалу от первого изменения совокупности до второго. В любой момент второго интервала индекс Доу-Джонса будет определяться соотношением

$$I_{DJIA} = \frac{\sum_{l=1}^{N} p_l}{D},$$

где знаменатель D определяется выражением $D = \frac{\sum_{l=1}^{N} p_{l,1}}{I_{DJIA,1}}$, а $\sum_{l=1}^{N} p_{l,1}$ является суммой цен $p_{l,1}$ акций новой совокупности компаний в начале второго периода (в конце первого), $l = 1, 2, \ldots, N$, N — количество компаний в новой совокупности.

При втором изменении совокупности предприятий знаменатель D необходимо пересчитать по той же методике, положив

$$D = \frac{\sum_{m=1}^{M} p_{m,2}}{I_{DJIA,2}},$$

где $\sum_{m=1}^{M} p_{m,2}$ — сумма цен $p_{m,2}$ акций третьей совокупности компаний в начале третьего периода (в конце второго), M — количество компаний в третьей совокупности, $m = 1, 2, \ldots, M$; $I_{DJIA,2}$ — индекс, рассчитанный по предыдущей формуле, справедливой для момента второго изменения совокупности.

В любой момент третьего интервала индекс Доу-Джонса будет определяться соотношением, имеющим ту же структуру, что и предыдущая формула, т.е.

$$I_{DJIA} = \frac{\sum_{m=1}^{M} p_m}{D}.$$

Недостатком индексов, рассчитанных по простой арифметической средней, являются различные изменения значений этих индексов от изменения цен акций, имеющих до изменения значительно разнящиеся рыночные цены. Действительно, пусть совокупность состоит из двух акций с рыночными ценами p_1 и p_2, причем $p_1 > p_2$. Тогда индекс, рассчитанный по простой арифметической средней, будет равен:

$$I = \frac{p_1 + p_2}{2}.$$

Если цена первой акции увеличится в b раз, то индекс будет равен:

$$I_1 = \frac{p_1 b + p_2}{2}.$$

Если цена второй акции увеличится в то же количество раз b, то индекс

$$I_2 = \frac{p_1 + p_2 b}{2}.$$

Индекс I_1 возрос сильнее, чем индекс I_2, несмотря на то, что цена каждой акции увеличилась в одно и то же количество раз. Действительно,

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{p_1 b + p_2}{p_1 + p_2 b} = \frac{\frac{p_1}{p_2} b + 1}{\frac{p_2}{p_1} b + 1} > 1, \text{ так как } \frac{p_1}{p_2} > 1.$$

При расчете индекса по взвешенной арифметической средней в качестве веса принимается количество находящихся в обращении акций каждой компании, входящей в совокупность. Для расчета индекса используется формула

$$I_t = I_0 \frac{\sum_{k=1}^{n} p_{k,t} q_{k,0}}{\sum_{k=1}^{n} p_{k,0} q_{k,0}},$$

где I_0 — начальное значение индекса; $p_{k,0}$, $p_{k,t}$ — цены акций компании под номером k в начальный (базисный) момент и в момент t соответственно, k = 1, 2,..., n; n — количество компаний совокупности; $q_{k,0}$ — количество акций в обращении компании под номером k.

Произведение цены акций компании и количества акций, находящихся в обращении, называется *рыночной капитализацией* этой компании. Поэтому индексы, взвешенные по количеству находящихся в обращении акций компаний, называют также индексами, взвешенными по объемам рыночной капитализации.

Пусть в момент $t + 1$ изменилась совокупность компаний или изменилось количество акций, находящихся в обращении, хотя бы одной компании совокупности. Тогда расчет индекса по взвешенной арифметической средней для этого и любого последующего момента проводится по формуле

$$I_{t+1} = I_t \frac{\sum_{l=1}^{N} p_{l,t+1} q_{l,1}}{\sum_{l=1}^{N} p_{l,t} q_{l,1}},$$

где I_t — значение индекса в момент, предшествующий изменению совокупности; N — количество компаний новой совокупности; $p_{l,t+1}$, $p_{l,t}$ — цены акций компании под номером l в момент изменения совокупности компаний и в момент, предшествующий изменению совокупности соответственно, $l = 1, 2, ..., N$; $q_{l,1}$ — количество акций в обращении компании под номером l в момент $t + 1$.

По формуле взвешенной арифметической средней рассчитывается ряд широко применяемых индексов.

1. Индекс РТС (Российской торговой системы) имеет совокупность компаний, равную 24, базисный момент — 1 сентября 1995 г., начальное значение — 100.

2. Индекс AK&M (сводный) имеет совокупность компаний, равную 50, базисный момент — 1 сентября 1993 г., начальное значение — 1.

3. Индекс Интерфакса (сводный) имеет совокупность компаний, равную 65, базисный момент — 1 декабря 1995 г., начальное значение — 100.

4. MT-Index (Moscow Times) имеет совокупность компаний, равную 50, базисный момент — 1 сентября 1994 г., начальное значение — 100.

5. Standard & Poor's 500 имеет совокупность компаний, равную 500, базисный момент — конец 1943 г., начальное значение — 10.

6. NYSE Composite Index (индекс Нью-Йоркской фондовой биржи) имеет совокупность компаний более 1500 (все котируемые на этой бирже акции), базисный момент — 1965 г., начальное значение — 50.

К недостаткам индексов взвешенных по объемам рыночной капитализации следует отнести наиболее сильное влияние на их значение компаний с большими объемами рыночной капитализации.

Фондовые индексы используются для определения динамики среднего уровня цен на рынке. Для правильно построенных индексов их временны́е изменения будут слабо отличаться друг от друга.

11.5. Основные характеристики акций

На первичном рынке эмитентами продаются акции их первым владельцам — инвесторам. Первая эмиссия ценных бумаг осуществляется при учреждении акционерного общества и при увеличении размеров его уставного капитала путем выпуска акций.

Первичная эмиссия акций осуществляется в форме:

- открытого (публичного) размещения акций среди неограниченного круга инвесторов с публичным объявлением о выпуске акций, проведением рекламной кампании и регистрацией проспекта эмиссии;
- закрытого (частного) размещения акций (без публичного объявления и проведения рекламной кампании) среди заранее известного ограниченного круга инвесторов (до 500 включительно) или на сумму не более 50 тыс. минимальных размеров оплаты труда.

В момент учреждения акционерного общества первичная эмиссия акций осуществляется только в форме закрытого размещения.

Допуск ценных бумаг к биржевым торгам проводится при помощи процедуры листинга. После проверки ценные бумаги включаются в котировальный лист, являющийся главным ориентиром для всех потенциальных инвесторов.

Процедура допуска иностранных компаний на западные рынки довольно сложна. Поэтому в США, например, начинают обращаться не акции, а американские депозитарные расписки, которые выпускаются американскими банками на приобретенные этими банками иностранные акции. Владелец такой расписки получает дивиденды и может выиграть от прироста курсовой стоимости.

Акции приобретаются для того, чтобы получить доход в виде дивидендов и (или) разницы в ценах покупки и продажи. Оценка математических ожиданий и ковариаций случайных доходностей ценных бумаг i-го и j-го типов можно определить по выборке. В качестве выборки применяют наблюдаемые во времени последовательности цен акций. При этом за рубежом используются 100 показателей динамического ряда с периодом между отчетами один квартал, т.е. выборка берется за 25 лет. В России фондовый рынок существует недавно, поэтому длительность выборки будет существенно меньше.

При расчете доходности j-й ценной бумаги применяют соотношение

$$a_{j,t} = \frac{P_{j,t+1} - P_{j,t} + d_{j,t}}{P_{j,t}},$$

где $P_{j,t}, P_{j,t+1}$ — цена j-й ценной бумаги в начале периода t и $t+1$ соответственно; $d_{j,t}$ — дивиденд за период t.

Эта формула может быть уточнена за счет учета разницы цен покупки и продажи ценных бумаг. Например, инвестор покупает в начале периода t ценную бумагу, затем получает дивиденды и продает ее в начале периода $t+1$. В этом случае под $P_{j,t}$ следует считать цену покупки в начале периода t, а под $P_{j,t+1}$ — цену продажи в начале периода $t+1$. Цены покупки и продажи обычно различаются.

В качестве математического ожидания j-й ценной бумаги можно использовать среднее арифметическое:

$$\overline{a}_j = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} a_{j,t},$$

где T — количество показаний динамического ряда; $a_{j,t}$ — доходность j-й ценной бумаги в t-м периоде.

Для расчета выборочной ковариации i-й и j-й ценных бумаг используется формула

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}\left(a_{i,t} - \overline{a}_i\right)\cdot\left(a_{j,t} - \overline{a}_j\right).$$

Дивиденды выплачиваются акционерным обществом по решению собрания акционеров. Даже при наличии прибыли собрание может принять решение о невыплате дивидендов, тем более если контрольный пакет акций сосредоточен в одних руках. Однако если конкретное акционерное общество не выплачивает дивидендов, то при выпуске новых акций разместить их будет крайне трудно.

Качество акции может оценить сам акционер, используя несложные показатели. Одним из таких показателей является годовая ставка дивиденда, равная отношению дивидендов за год к рыночной стоимости акции, т.е.

$$a_d = \frac{d}{A},$$

где d — дивиденды, полученные за год; A — рыночная стоимость акции.

Другим показателем является коэффициент ликвидности, характеризующий способность акции быстро и без потерь быть проданной. Первый коэффициент ликвидности является отношением общего объема предложений рассматриваемых акций к их общему объему продаж по результатам отдельных торгов или за заданный период. Ликвидность акций повышается с уменьшением коэффициента ликвидности. Второй коэффициент ликвидности — это отношение спрэда (разность между минимальной ценой предложения и максимальной ценой спроса) к максимальной цене спроса. Наиболее ликвидными являются акции, у которых эта величина не превышает 3%.

▷ **Пример 11.4.** Минимальная цена предложения на акцию равна 152 руб., максимальная цена спроса — 148 руб.
Определить ликвидность акции.
Решение. Найдем коэффициент ликвидности:

$$K = \frac{152-148}{148} = 0{,}027, \quad \text{или} \quad 2{,}7\%.$$

Так как $K < 3\%$, то акции являются ликвидными. ◀

Третьим показателем качества акций служит срок ее окупаемости. В общем случае при расчете срока окупаемости необходимо сравнивать приведенные величины денежного потока. Однако для приблизительных оценок иногда пользуются формулой

$$n_{ok} = \frac{A}{d},$$

где A — рыночная стоимость акции; d — дивиденды, полученные за год.

Более квалифицированный анализ качества акций на Западе проводят и публикуют аналитические компании. При этом акции присваивается рейтинг, например, по семизначной системе. Чем выше рейтинг, тем надежнее и качественнее акция. Например, компания Standard & Poor's использует следующие обозначения рейтинга акций: $A+$ — высший, A — высокий, $A-$ — выше среднего, $B+$ — средний, B — ниже среднего, $B-$ — низкий, C — очень низкий. От рейтинга, естественно, зависит отношение к акции инвесторов. «Голубые фишки» — это акции крупных предприятий с высоким кредитным рейтингом.

11.6. Основные характеристики облигаций

Облигация — срочная ценная долговая бумага, удостоверяющая отношение займа между ее владельцем (кредитором) и эмитентом (заемщиком). Платежи по облигациям осуществляются эмитентом перед платежами по акциям.

К основным характеристикам облигаций относятся:

- номинальная цена (номинал);
- выкупная цена или правило ее определения, если она отличается от номинала;
- дата погашения;
- купонная процентная ставка;
- дата выплат по купонам.

Купонные облигации могут иметь фиксированную или плавающую купонную ставку. В последнем случае ставка зависит от уровня ссудного процента. Бывают облигации с возрастающей купонной ставкой. Эти облигации выпускаются обычно во время инфляции.

Рыночная цена облигации чаще всего отличается от номинальной и характеризуется курсом этой облигации. Под *курсом* понимается отношение рыночной цены к номиналу, выраженное в процентах. Таким образом, курс K рассчитывается по формуле

$$K = \frac{B}{N},$$

где B — рыночная цена облигации; N — номинал облигации.

▷ **Пример 11.5.** Номинальная цена облигации равна 500 руб., ее рыночная стоимость — 480 руб.

Определить курс.

Р е ш е н и е. $K = \frac{B}{N} = \frac{480}{500} = 0,96,$ или 96%.◀

Расчет цены проводится с целью определения продажной цены облигации и выявления неверно оцененных рынком облигаций. При этом чаще всего используется метод дисконтированных доходов, состоящих из периодически получаемых по купонам процентов и номинала, выплачиваемого в конце срока [2]. Например, если проценты выплачиваются p раз в году в конце периода в течение n лет, ставка дисконтирования равна r процентов годовых, а номинал — N, то цена облигации равна современной стоимости всех платежей p-срочной ренты и номинала:

$$A = R\frac{1-(1+r)^{-n}}{p\left[(1+r)^{1/p}-1\right]}+\frac{N}{(1+r)^n},$$

где R — годовая выплата процентов.

Разовые выплаты вычисляются по формуле

$$C = \frac{R}{p}.$$

Если купонная годовая ставка по облигации составляет u процентов от номинала, то эту формулу можно записать в виде:

$$k = \frac{A}{N} = u\frac{1-(1+r)^{-n}}{p\left[(1+r)^{1/p}-1\right]}+\frac{1}{(1+r)^n},$$

где k — расчетный курс облигации; $u = \dfrac{R}{N}$.

Если расчетный курс совпадает с рыночным, то $k = K$ и $A = B$.

▷ **Пример 11.6.** Облигация со сроком 7 лет, проценты по которой выплачиваются ежеквартально в размере 100 руб. (125 руб.), имеет номинал 5000 руб.

Рассчитать ее курс и цену при ставке 10% годовых.

Р е ш е н и е. *Вариант 1.* Предварительно определяем купонную годовую ставку $u = R/N = Cp/N = 4 \cdot 100/5000 = 0{,}08$.

Расчетный курс находится по формуле

$$k = 0{,}08\frac{1-1{,}1^{-7}}{4\left(1{,}1^{1/4}-1\right)}+\frac{1}{1{,}1^7} = 0{,}91694674, \text{ или } \approx 91{,}69\%.$$

Цена облигации равна:

$$A = 5000 \cdot 0{,}91694674 = 4584{,}73 \text{ руб.}$$

Вариант 2. $u = 4 \cdot 125/5000 = 0{,}1$.

$$k = 0{,}1\frac{1-1{,}1^{-7}}{4\left(1{,}1^{1/4}-1\right)}+\frac{1}{1{,}1^7} = 1{,}0178939, \text{ или } \approx 101{,}79\%.$$

$$A = 5000 \cdot 1{,}0178939 = 5089{,}47 \text{ руб.}$$ ◀

Ставка дисконтирования r, которая использовалась выше при расчете цены, в общем случае является номинальной (брутто-ставкой), в которую входит инфляция. Если инфляционные эффекты учитываются отдельно, то задаются реальной (желаемой) ставкой a, рассчитывают брутто-ставку r, а затем определяют цену облигации.

▷ **Пример 11.7.** Облигация со сроком 7 лет, проценты по которой выплачиваются ежеквартально в размере 100 руб., имеет номинал 5000 руб. Инвестор желает получить доходность 6% годовых.

Рассчитать курс облигации и ее цену при ожидаемом ежегодном темпе инфляции 3%, 30%.

Р е ш е н и е. Предварительно определяем купонную годовую ставку $u = R/N = Cp/N = 4 \cdot 100/5000 = 0{,}08$.

Вариант 1. Брутто-ставка равна:

$$r = (1+a)\sqrt[n]{I_p} - 1 = (1+a)I_{p,1} - 1 = 1{,}06 \cdot 1{,}03 - 1 = 0{,}0918, \text{ или } 9{,}18\%.$$

Расчетный курс облигации равен:

$$k = 0{,}08\frac{1-1{,}0918^{-7}}{4\left(1{,}0918^{1/4}-1\right)} + \frac{1}{1{,}0918^7} = 0{,}9544926, \text{ или } \approx 95{,}45\%.$$

Цена облигации $A = 5000 \cdot 0{,}9544924 = 4772{,}46$ руб.

Вариант 2. $r = 1{,}06 \cdot 1{,}3 - 1 = 0{,}378$, или 37,8%.

$$k = 0{,}08\frac{1-1{,}378^{-7}}{4\left(1{,}378^{1/4}-1\right)} + \frac{1}{1{,}378^7} = 0{,}320229, \text{ или } \approx 32{,}02\%.$$

$$A = 5000 \cdot 0{,}320229 = 1601{,}14 \text{ руб.}$$

Таким образом, инфляция довольно сильно влияет на цену облигации. ◀

Если выплаты процентов производятся один раз в году (годовая рента), то формула для расчетного курса приобретает вид:

$$k = u\frac{1-(1+r)^{-n}}{r} + \frac{1}{(1+r)^n}.$$

Для бессрочных облигаций расчетный курс при выплатах процентов по купонам один раз в году определяется по формуле

$$k = \frac{u}{r}.$$

Для облигаций, по которым купонные проценты по ставке u и номинал выплачиваются в конце срока, цена и курс определяются по формулам

$$A = \left(\frac{1+u}{1+r}\right)^n N; \quad k = \left(\frac{1+u}{1+r}\right)^n.$$

▷ **Пример 11.8.** Облигация со сроком 7 лет, проценты и номинал по которой выплачиваются в конце срока, имеет номинал 5000 руб. Купонные проценты начисляются по ставке 8% годовых.

Рассчитать курс и цену облигации при ставке дисконтирования 10% годовых.

Р е ш е н и е. Расчетный курс находится по формуле

$$k = \left(\frac{1+u}{1+r}\right)^n = \left(\frac{1+0,08}{1+0,1}\right)^7 = 0,8794624, \text{ или } \approx 87,95\%.$$

Цена облигации равна:

$$A = 5000 \cdot 0,8794624 = 4397,31 \text{ руб.} \blacktriangleleft$$

Для облигаций, по которым в конце срока выплачивается только номинал (бескупонные облигации), цена и курс находятся из соотношений

$$A = \frac{N}{(1+r)^n}; \quad k = \frac{1}{(1+r)^n}.$$

▷ **Пример 11.9.** Бескупонная облигация со сроком 7 лет имеет номинал 5000 руб.

Рассчитать курс и цену облигации при ставке дисконтирования 10% годовых.

Р е ш е н и е. Расчетный курс находится по формуле

$$k = \frac{1}{1,1^7} = 0,513158, \text{ или } \approx 51,32\%.$$

Цена облигации равна:

$$A = 5000 \cdot 0,513158 = 2565,79 \text{ руб.} \blacktriangleleft$$

Доходность облигаций (ставка помещения) — это эффективная годовая ставка сложных процентов, сумма дисконтированных доходов и расходов по которой равняется рыночной цене облигации.

Для облигации с выплатой процентов p раз в году в течение n лет, имеющей номинал N и курс K, доходность определяется решением уравнения

$$K-u\frac{1-(1+r)^{-n}}{p\left[(1+r)^{1/p}-1\right]}-\frac{1}{(1+r)^{n}}=0\ ,$$

где K — рыночный курс облигации; r — ее доходность.

Решить это уравнение можно, например, цифровым методом на компьютере.

▷ **Пример 11.10.** Облигация со сроком 7 лет, купонные проценты по которой выплачиваются ежеквартально по годовой купонной ставке 8%, продается на рынке по курсу 85%.

Определить номинальную доходность вложений в облигации, а также реальную доходность при ожидаемом ежегодном темпе инфляции 9%.

Р е ш е н и е. Уравнение для определения доходности имеет вид:

$$0,85-0,08\frac{1-(1+r)^{-7}}{4\left[(1+r)^{1/4}-1\right]}-\frac{1}{(1+r)^{7}}=0.$$

График левой части этого уравнения от доходности представлен на рис. 11.9. Координата точки пересечения этого графика $r=0{,}119$ с осью абсцисс является искомой доходностью. Таким образом, доходность облигации равна 11,9% годовых. Реальная доходность по облигации равна 11,9 — 9 = 2,9% годовых.

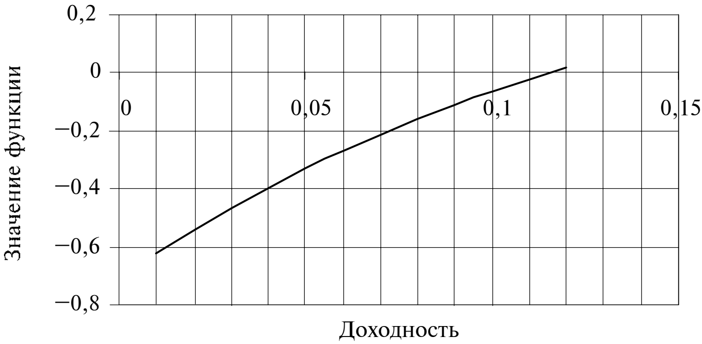


Рис. 11.9. **График для определения доходности** ◀

Для облигаций с выплатой по купонам один раз в году уравнение для определения доходности запишем в виде:

$$K - u\frac{1-\left(1+r\right)^{-n}}{r} - \left(1+r\right)^{-n} = 0.$$

Курс бескупонной облигации, по которой в конце срока выплачивается только номинал, определяется из соотношения $K - \left(1+r\right)^{-n} = 0$. Решив это уравнение относительно r, находим доходность бескупонной облигации:

$$r = \frac{1}{\sqrt[n]{K}} - 1.$$

▷ **Пример 11.11.** Бескупонная облигация со сроком 7 лет куплена по курсу 79%.
Определить доходность инвестиций.
Р е ш е н и е. Доходность определяется по формуле

$$r = \frac{1}{\sqrt[7]{0,79}} - 1 = 0,034248, \text{ или } \approx 3,42\%. \blacktriangleleft$$

11.7. Государственные облигации

Государственные ценные бумаги являются финансовыми инструментами, обслуживающими государственный внутренний долг, и представляют собой облигации и векселя Министерства финансов РФ. Рынок государственных ценных бумаг служит для привлечения финансовых ресурсов, а для инвесторов является выгодным направлением вложения денежных средств.

Федеральными государственными ценными бумагами признаются бумаги, выпущенные от имени Российской Федерации. Денежные средства, привлекаемые в результате размещения государственных ценных бумаг, и порядок их расходования определяются законами Российской Федерации.

Эмитентом на рынке государственных ценных бумаг выступает государство в лице Министерства финансов РФ. Первичное размещение и погашение ценных бумаг осуществляется Центральным банком РФ по поручению Министерства финансов РФ.

Инвестором на рынке государственных ценных бумаг может быть любое юридическое или физическое лицо, резиденты и нерезиденты.

Контролирующим органом на рынке государственных ценных бумаг является Центральный банк РФ.

Существенную долю в структуре внутреннего государственного долга занимают государственные краткосрочные облигации (ГКО) и облигации федерального займа (ОФЗ). Полученные от реализации этих облигаций средства используются для покрытия дефицита федерального бюджета. Выпускаются бескупонные облигации и облигации с выплатами по купонам.

Облигации государственного сберегательного займа (ОГСЗ) предназначены для активного привлечения средств населения. ГКО и ОФЗ предназначены для физических и юридических лиц. Однако участие физических лиц в операциях с этими ценными бумагами весьма затруднительно. Это связано с тем, что операции купли-продажи этих облигаций проводятся только через биржевые торги, к участию в которых допущены уполномоченные дилеры. Дилер работает только с крупными суммами, которыми подавляющее большинство населения не обладает. Поэтому для частных лиц выпущены ОГСЗ с номинальной стоимостью 500 руб. Облигации выпускаются в документарной форме со сроком обращения 1—2 года и регулярной выплатой дохода по купонам. Купонный период составляет три месяца. Купонный доход определяется по аналогии с доходом по ОФЗ и привязан к среднему уровню доходности по ГКО. При этом обычно устанавливается премия к расчетному среднему уровню доходности. Реализация облигаций осуществляется через уполномоченные банки, которым эмитент продает выпущенные облигации на аукционе. С ОГСЗ можно совершать сделки купли-продажи в течение срока их обращения.

Ценными муниципальными бумагами называются ценные бумаги, выпущенные от имени муниципального образования. Решение об эмитенте ценных муниципальных бумаг Российской Федерации принимает Правительство РФ. Эмитентом ценных муниципальных бумаг выступает исполнительный орган местного самоуправления, действующий на основе устава муниципального образования.

11.8. Дюрация и изгиб

Цена облигации со сроком n, с купонными ежегодными выплатами R_t (где t — номер выплаты, или номер года) и с номиналом N определяется суммой всех выплат, дисконтированных по ставке r, и является функцией этой ставки. Таким образом, зависимость цены облигации от ставки можно представить в виде соотношения

$$A(r) = \sum_{t=1}^{n} \frac{R_t}{(1+r)^t} + \frac{N}{(1+r)^n}.$$

По условиям задачи всегда $r > -1$, $R_t \geq 0$, $N > 0$. Поэтому $A > 0$, т.е. всегда является величиной положительной. Первая производная цены облигации по ставке дисконтирования определяется выражением

$$\frac{dA}{dr} = -\frac{1}{1+r}\left[\sum_{t=1}^{n}\frac{t \cdot R_t}{\left(1+r\right)^t} + \frac{n \cdot N}{\left(1+r\right)^n}\right].$$

Эта производная при поставленных выше условиях величина всегда отрицательная. Отсюда следует, что функция $A(r)$ является убывающей. Вторая производная цены по ставке имеет вид:

$$\frac{d^2A}{dr^2} = \sum_{t=1}^{n}\frac{t \cdot (t+1)R_t}{\left(1+r\right)^{t+2}} + \frac{n(n+1)N}{\left(1+r\right)^{t+2}}.$$

Как следует из этого соотношения, вторая производная всегда положительна. Поэтому исследуемая кривая всегда имеет выпуклость, обращенную вниз так, как показано на рис. 11.10.

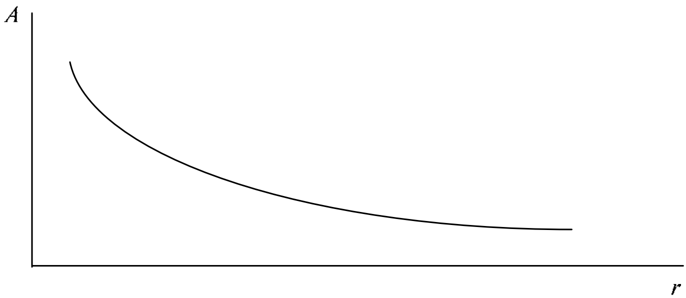


Рис. 11.10. **Графическая зависимость цены облигации от процентной ставки**

Разложим функцию $A(r)$ в ряд Тейлора в точке $r = r_0$, ограничившись первыми тремя членами:

$$A(r) = A(r_0) + f'(r_0)(r - r_0) + \frac{f''(r_0)}{2}(r - r_0)^2,$$

где $f'(r_0)$, $f''(r_0)$ — первая и вторая производные от цены облигации по ставке дисконтирования в точке $r = r_0$.

Введем замену:

$$\Delta A = A(r) - A(r_0); \quad \Delta r = r - r_0$$

и разделим левую и правую части функции для цены облигации на $A_0 = A(r_0)$. В результате получим

$$\frac{\Delta A}{A_0} = \frac{f'(r_0)}{A_0}\Delta r + \frac{f''(r_0)}{2A_0}(\Delta r)^2.$$

Подставим соотношения для производных в последнюю формулу. В результате найдем:

$$\frac{\Delta A}{A_0} = -\frac{1}{A_0}\left[\sum_{t=1}^{n}\frac{t \cdot R_t}{(1+r_0)^t} + \frac{n \cdot N}{(1+r_0)^n}\right]\frac{\Delta r}{1+r_0} +$$

$$+\frac{1}{2A_0}\left[\sum_{t=1}^{n}\frac{t \cdot (t+1)R_t}{(1+r_0)^{t+2}} + \frac{n(n+1)N}{(1+r_0)^{n+2}}\right](\Delta r)^2.$$

Входящие в это выражения величины называются *дюрацией*:

$$D = \frac{1}{A_0}\left[\sum_{t=1}^{n}\frac{t \cdot R_t}{(1+r_0)^t} + \frac{nN}{(1+r_0)^n}\right]$$

и *изгибом*:

$$C = \frac{1}{2A_0}\left[\sum_{t=1}^{n}\frac{t(t+1)R_t}{(1+r_0)^{t+2}} + \frac{n(n+1)N}{(1+r_0)^{n+2}}\right].$$

Используя эти выражения, перепишем формулу для относительного приращения цены в виде:

$$\frac{\Delta A}{A_0} = -D\frac{\Delta r}{1+r_0} + C \cdot (\Delta r)^2.$$

Подставив сюда введенные выше обозначения, получим формулу для цены:

$$A = A_0\left[1 - D\frac{\Delta r}{1+r_0} + C \cdot (\Delta r)^2\right].$$

Если пренебречь изгибом, то формула для цены акции будет иметь вид:

$$A = A_0\left[1 - D\frac{\Delta r}{1 + r_0}\right].$$

Полученные зависимости в виде графиков представлены на рис. 11.11. Сплошная линия — цена облигации, рассчитанная по точной формуле. Кривая, представленная точками, — график цены облигации с учетом дюрации и изгиба. Прямая пунктирная линия соответствует соотношению, в котором учтена только дюрация. Все три линии пересекаются в точке (r_0, A_0).

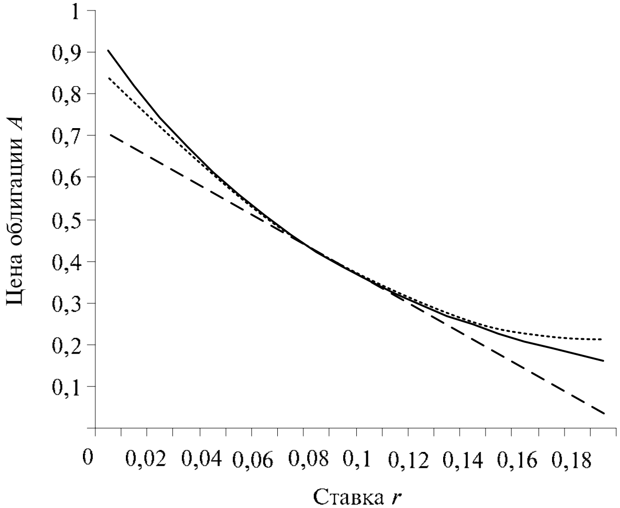


Рис. 11.11. **Определение дюрации:**

——— — истинная цена; – – – — цена с учетом дюрации;
·········· — цена с учетом дюрации и изгиба

Таким образом, при известной дюрации и изгибе по приведенной формуле для относительного изменения цены облигации легко определить изменение этой цены ΔA при незначительном изменении ставки дисконтирования Δr. При увеличении модуля Δr ошибка расчета величины изменения цены облигации увеличивается. Если отбросить слагаемое, учитывающее изгиб, то изменение цены облигации при изменении ставки дисконтирования будет определяться только дюрацией, т.е.

$$\frac{\Delta A}{A_0} = -D\frac{\Delta r}{1 + r_0}.$$

Как следует из формулы для дюрации, этот показатель является средним взвешенным моментов платежа. Весами являются дисконтированные платежи, деленные на современную стоимость всех платежей. Единицей измерения дюрации является единица измерения времени, т.е. год.

▷ **Пример 11.12.** Бескупонная облигация, имеющая номинал 5000 руб., будет погашена через два года.

Определить цену облигации, дюрацию и изгиб для ставки дисконтирования 10% годовых (точка разложения). Найти изменение цены облигации при изменении ставки дисконтирования на ±2% для трех случаев:

- истинное;
- при учете дюрации и изгиба;
- при учете только дюрации.

Найти методические ошибки расчета цены при учете дюрации и изгиба, а также только дюрации.

Р е ш е н и е. Для определения истинной цены облигации используется полученная формула, которая для бескупонной облигации имеет вид:

$$A_0 = \frac{N}{(1+r_0)^{n_T}} = \frac{5000}{(1+0,1)^2} = 4132,23 \text{ руб.}$$

Преобразовав формулу для дюрации, получим

$$D = \frac{1}{A_0} \cdot \frac{nN}{(1+r_0)^n} = n.$$

Таким образом, дюрация для сосредоточенного платежа равна сроку его выплаты. Для нашего случая

$$D = 2 \text{ года.}$$

Изгиб рассчитывается по формуле

$$C = \frac{1}{2A_0} \cdot \frac{n \cdot (n+1) N}{(1+r_0)^{t+2}} = \frac{n \cdot (n+1)}{2(1+r_0)^2} = \frac{2 \cdot 3}{2 \cdot 1,1^2} = 2,48.$$

Истинное изменение цены облигации при изменении ставки дисконтирования на величину Δr определяется соотношением

$$\frac{\Delta A}{A_0} = \frac{A(r) - A_0}{A_0} = \frac{\dfrac{N}{(1+r_0+\Delta r)^n} - \dfrac{N}{(1+r_0)^n}}{\dfrac{N}{(1+r_0)^n}} = \left(\frac{1+r_0}{1+r_0+\Delta r}\right)^n - 1.$$

Для условий примера $r = r_0 \pm \Delta r = 10\% \pm 2\%$. Подставив эти значения в полученную формулу, найдем:

$$\frac{\Delta A}{A_0} = \left(\frac{1+0,1}{1+0,1+0,02}\right)^2 - 1 = -0,0354, \quad \text{или} \quad -3,54\%;$$

$$\frac{\Delta A}{A_0} = \left(\frac{1+0,1}{1+0,1-0,02}\right)^2 - 1 = -0,03738, \quad \text{или} \quad 3,738\%.$$

Изменение цены облигации при учете дюрации и изгиба определяется по формуле

$$\frac{\Delta A}{A_0} = -2\frac{0,02}{1,1} + 2,48 \cdot 0,02^2 = -0,03537, \quad \text{или} \quad -3,537\%;$$

$$\frac{\Delta A}{A_0} = -2\frac{-0,02}{1,1} + 2,48 \cdot (-0,02)^2 = 0,03736, \quad \text{или} \quad 3,736\%.$$

Изменение цены облигации при учете только дюрации определяется по формуле

$$\frac{\Delta A}{A_0} = -2\frac{(\pm 0,02)}{1,1} = \mp 0,03636, \quad \text{или} \quad \mp 3,636\%.$$

Результаты расчета сведены в табл. 11.1.

Таблица 11.1

Δr, %	*Истинное изменение цены, %*	*Изменение цены при учете дюрации и изгиба, %*	*Ошибка расчета изменения цены при учете дюрации и изгиба, %*	*Изменение цены при учете только дюрации, %*	*Ошибка расчета изменения цены при учете только дюрации, %*
+0,02	−3,54	−3,538	−0,002	−3,636	0,096
−0,02	3,738	3,736	0,002	3,636	0,102

Из табл. 11.1 следует, что учет изгиба снижает ошибку расчета. ◀

11.9. Форвардные контракты

Производные финансовые инструменты, к числу которых относятся форвардные, фьючерсные и опционные контракты, предназначены для борьбы с финансовыми рисками. Часто эти инструменты используются для игры на бирже.

Контракты заключаются на условиях либо немедленной поставки актива, либо в будущем. Под *активом* в данном случае понимается товар, лежащий в основе контракта. К активам можно отнести акции, облигации, векселя, банковские депозиты, валюту, предметы труда и т.д.

Если сделки заключаются на немедленную поставку актива, то их называют *кассовыми*, или *спотовыми*. Рынок таких сделок называется кассовым (спотовым), а цена в результате их заключения — кассовой (спотовой).

Если сделки заключаются на поставку актива в будущем, то их называют *срочными*. Срочный контракт относится к разновидности производных финансовых инструментов. В срочном контракте оговариваются все условия соглашения. Срочные контракты подразделяются на твердые и условные. *Твердые сделки*, к которым относятся форвардные и фьючерсные контракты, обязательны для исполнения. *Условные сделки* опционных контрактов не обязательны для исполнения одной стороной контракта.

Форвардный контракт — соглашение между двумя сторонами о будущей поставке предмета контракта, которое заключается вне биржи.

Заключение форвардного контракта не требует от сторон каких-либо расходов (за исключением накладных расходов). Форвардный контракт — твердая сделка, обязательная для исполнения. Сторона, которая обязуется поставить актив по контракту, открывает *короткую позицию*, т.е. продает форвардный контракт. Сторона, которая приобретает актив по контракту, открывает *длинную позицию*, т.е. покупает форвардный контракт. Форвардный контракт страхует поставщика или покупателя от неблагоприятного изменения цены. При этом одна из сторон выигрывает, а другая теряет.

▷ **Пример 11.13.** Сторона A (короткая позиция) заключила со стороной B (длинная позиция) форвардный контракт на поставку стороне B через некоторое время 50 облигаций по цене 10 000 руб. за каждую. В момент поставки рыночная цена облигаций составила 12 000 руб.

Определить проигравшую сторону и величину потерь.

Р е ш е н и е. Стоимость облигаций в момент поставки составляет:

$$S = 12 \cdot 50 = 600\,000 \text{ руб.}$$

Сторона A поставила облигации за

$$S_{\text{пост}} = 10 \cdot 50 = 500\,000 \text{ руб.}$$

Потери стороны A составили

$$\Delta S = S - S_{\text{пост}} = 600\,000 - 500\,000 = 100\,000 \text{ руб.} ◀$$

Несмотря на то что форвардный контракт является твердой сделкой, тем не менее существует риск его неисполнения. Поэтому при заключении сделки стороны должны быть уверены в добросовестности и платежеспособности друг друга. Это является недостатком форвардного контракта. Другим его недостатком является практическое отсутствие вторичного рынка, так как трудно найти третью сторону, интересам которой в точности соответствуют условия форвардного контракта.

Форвардный контракт характеризуется различными типами цен.

Цена поставки — цена, по которой сделка будет исполнена. Она определяется в первоначальный момент заключения контракта и не изменяется в течение всего времени его действия. Если первоначальный момент времени обозначить через 0 (рис. 11.12), а время действия контракта — через n, то актив по цене поставки будет поставлен в момент n. Здесь t — текущее время.

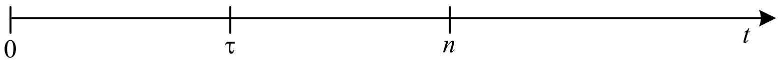


Рис. 11.12. **Схема финансовой операции**

Форвардная цена — цена поставки, которая была бы зафиксирована при заключении форвардного контракта с теми же характеристиками, но в момент времени, отличный от первоначального момента, например, в момент времени τ (см. рис. 11.12).

▷ **Пример 11.14.** Продолжение примера 11.13. Через время τ, прошедшее с момента заключения первоначального форвардного контракта, был заключен другой форвардный контракт на те же 50 облигаций, поставляемых в момент времени n, но по цене поставки 11 000 руб.

Определить цену поставки и форвардную цену первоначального форвардного контракта для момента времени τ.

Р е ш е н и е. Цена поставки — 10 000 руб., форвардная цена — 11 000 руб. ◀

Цена форвардного контракта — это сумма, которую может получить одна из сторон, продав контракт третьему лицу. Ясно, что в первоначальный момент цена форвардного контракта равна нулю, так как стороны при его заключении не несут расходов. С того момента, когда форвардная цена начнет отличаться от цены поставки, контракт приобретает цену.

Цена форвардного контракта для произвольного момента $t=\tau$, лежащего между моментом заключения контракта и моментом его закрытия n, вычисляется по формуле

$$F=\left(S-S_0\right)e^{-\delta_\tau T},$$

где F — цена форвардного контракта; S_0 — цена поставки актива; δ_τ — сила роста на момент оценки τ; $T=n-\tau$ — временной интервал между моментом оценки и моментом закрытия контракта.

▷ **Пример 11.15.** Инвестор покупает форвардный контракт (открывает длинную позицию) на приобретение бескупонной облигации через два года. Цена поставки облигации равна 27 000 руб. Сила роста через полгода ($\tau=0{,}5$ года) оказалась равной 20%.

Определить цену форвардного контракта через 0,5 года после его заключения при форвардной цене 30 000 руб. и 25 000 руб.

Р е ш е н и е.

$$F_1=(30\,000-27\,000)e^{-0{,}2\cdot 1{,}5}=2220 \text{ руб.}$$

$$F_2=(25\,000-27\,000)e^{-0{,}2\cdot 1{,}5}=-1480 \text{ руб.}$$

В первом случае цена имеет знак плюс, т.е. инвестор сможет продать контракт за 2220 руб. Во втором случае цена имеет знак минус, т.е. инвестор контракт продать не сможет. Поэтому в момент приобретения актива при условии, что форвардная цена не изменится за полтора года и будет равна 25 000 руб., переплатит за облигацию 27 000 − 25 000 = 2000 руб. ◀

Таким образом, для того, чтобы избежать потерь при приобретении форвардного контракта, необходимо предвидеть поведение функции $\delta(t)$ во времени. Для этих целей могут быть использованы методы прогнозирования.

Формула для расчета цены форвардного контракта на валюту может быть представлена в виде:

$$F=K_\tau Ve^{-\Delta_\tau T}-S_0e^{-\delta_\tau T}.$$

Эта формула удобна тем, что при расчете цены форвардного контракта на валюту позволяет использовать характеристики национальной и иностранной валюты, а именно: K_τ — курс иностранной валюты в наступивший момент $t=\tau$; $S_0=VK_{\text{пост}}$ — цена поставки валюты, V — количество единиц иностранной валюты, поставляемой по окончании контракта, $K_{\text{пост}}$ — курс поставки; δ_τ — форвардная сила роста национальной валюты к моменту $t=\tau$, Δ_τ — форвардная сила роста иностранной валюты к моменту $t=\tau$, $T=n-\tau$ — временной интервал между моментом оценки и моментом закрытия контракта.

11.10. Паритет покупательной способности

На характеристики форвардного контракта существенное влияние оказывает нарушение паритета ставок и цен. Паритет процентных ставок национальной и исследуемой иностранной валют утверждает, что инвестор должен получить одинаковый доход от размещения средств под процент без риска как в национальной, так и в иностранной валюте. При нарушении паритета ставок и цен характеристики форвардного контракта будут изменяться. Можно оценить целесообразность покупки валюты по форвардному контракту или на рынке в зависимости от типа нарушения паритета.

Паритет курсов иностранной валюты утверждает, что отношение курса иностранной валюты K_n в момент закрытия контракта n к курсу этой валюты в момент заключения форвардного контракта K_0 равно отношению коэффициента наращения за время n национальной валюты к коэффициенту наращения за это же время иностранной валюты:

$$\frac{K_n}{K_0}=\frac{e^{\int_0^n \delta\cdot dt}}{e^{\int_0^n \Delta\cdot dt}},$$

где δ — форвардная сила роста национальной валюты; Δ — форвардная сила роста иностранной валюты.

Инвестор собирается через некоторый промежуток времени приобрести определенную сумму иностранной валюты. Он может поступить в этом случае двояким образом: купить форвардный контракт на приобретение иностранной валюты в будущем или купить в будущем эту валюту на рынке. При решении поставленной задачи инвестор должен учитывать существующие спотовые и форвардные ставки национальной и иностранной валют, их связи с процентными ставками наращения, а также возможные нарушения паритетов ставок и цен.

При постоянных значениях силы роста, когда $\delta = \text{const}$ и $\Delta = \text{const}$, паритет курсов иностранной валюты выглядит следующим образом:

$$\frac{K_n}{K_0} = \frac{e^{\delta \cdot n}}{e^{\Delta \cdot n}}.$$

Паритет покупательной способности национальной и исследуемой иностранной валют утверждает, что отношение курсов иностранной валюты в исследуемом и в базисном периодах равно отношению индексов цен в соответствующих странах, рассчитанных для этих же периодов. Этот паритет имеет место тогда, когда процентные ставки национальной и исследуемой иностранной валют, очищенные от инфляции, равны друг другу, т.е. $a_{\text{Н}} = a_{\text{И}}$. Формула, определяющая этот паритет, имеет вид:

$$\frac{K_n}{K_0} = \frac{I_{p,\text{Н}}}{I_{p,\text{И}}},$$

где $I_{p,\text{Н}}, I_{p,\text{И}}$ — индексы цен национальной и иностранной валют соответственно.

Курс валюты зависит от конъюнктуры рынка, инфляции и в определенной степени от субъективных факторов, связанных с финансовой политикой правительства и Центрального банка. Безрисковые процентные ставки как национальной, так и иностранной валюты зависят в основном от конъюнктуры рынка и инфляции. Это положение тем не менее может быть нарушено при активном вмешательстве правительства и Центрального банка в работу финансового рынка. Действительно, капитал будет инвестироваться только в том случае, если реальная доходность выше нуля. Однако слишком высокая реальная доходность инвестиций приводит к дефициту средств на выплату процентов, за чем следуют банкротства и кризисы. Поэтому в стабильно развивающейся экономике возможны некоторые нарушения паритета покупательной способности валют, но изменение доходности по безрисковым активам отслеживает изменение темпа инфляции.

Рассмотрим нарушение паритета ставок и цен на характеристики форвардного контракта. Для этих целей проведем анализ отношения количества единиц иностранной валюты, купленной непосредственно на рынке V_n, к количеству единиц иностранной валюты V, купленной у продавца форвардного контракта. Это отношение имеет вид:

$$\frac{V_n}{V} = \frac{\dfrac{I_{p,\text{Н}}\left(1+a_{\text{Н}}\right)}{I_{p,\text{И}}\left(1+a_{\text{И}}\right)}}{\dfrac{K_n}{K_0}}.$$

Для простоты положим $a_{\text{Н}} = a_{\text{И}}$. Действительно, если это соотношение будет существенно нарушаться, то инвестор предпочтет вкладывать средства в экономику, приносящую больший доход. Тогда получим:

$$\frac{V_n}{V} = \frac{I_{p,\text{Н}}}{I_{p,\text{И}}} \bigg/ \frac{K_n}{K_0}.$$

В качестве примера валют рассмотрим российский рубль и доллар США. На рис. 11.13 представлена зависимость отношения курса доллара к курсу того же доллара в сентябре 1998 г. (нижняя линия). Верхняя линия — индекс цен рубля.

Как следует из рис. 11.13, до первого квартала 1999 г. отношение курса доллара и индекс цен практически совпадали. Позже рост индекса цен начинает существенным образом опережать рост отношения курсов.

Пусть форвардный контракт и счет на покупку долларов открыт в феврале 1999 г. На графике рис. 11.13 в этот момент отношение курса доллара и индекс цен совпадали. Рассмотрим ситуацию через год. Индекс цен опередил отношение курсов доллара на 1,1 дБ (заметим, что шкала ординат графика — логарифмическая), или в 1,288 раз. Темп прироста инфляции для доллара за год составил примерно 3%. Таким образом, разделив 1,288 на 1,03, получим:

$$\frac{V_n}{V} = 1,25.$$

Это значит, что количество единиц иностранной валюты, купленной непосредственно на рынке, будет на 25% превышать количество единиц иностранной валюты, купленной у продавца форвардного контракта. Поэтому выгоднее купить валюту на рынке, а не по форвардному контракту.

В общем случае если при составлении форвардного контракта учесть приведенные здесь соображения при определении курса поставки, то рассмотренные финансовые операции могут быть идентичными.

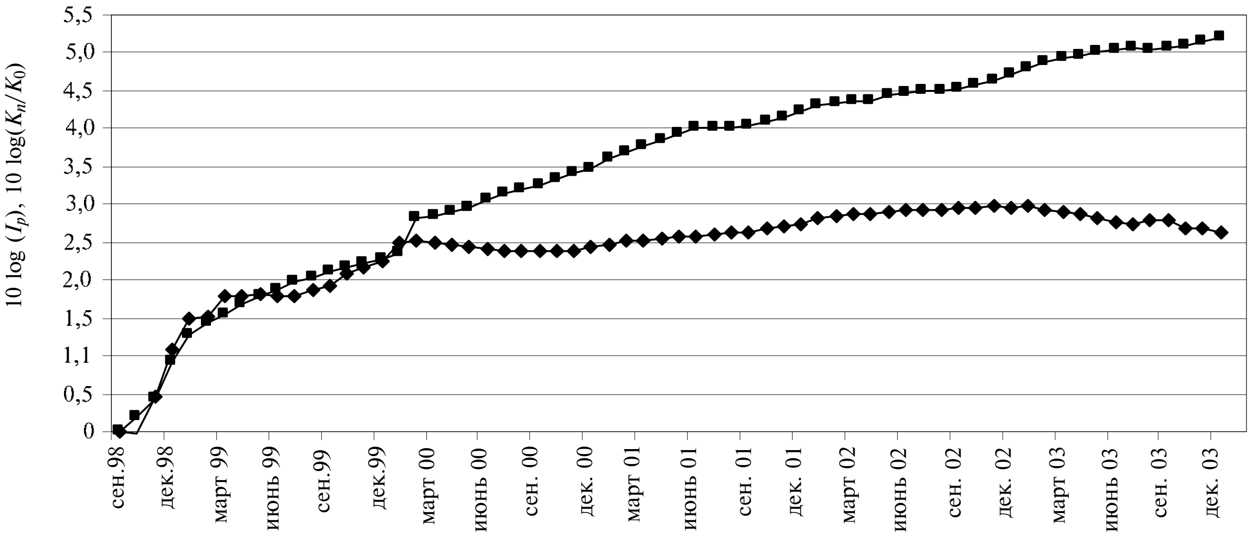


Рис. 11.13. **Индекс потребительских цен и курса доллара, нарастающим итогом с базой на сентябрь 1998 г.:**
— индекс курса доллара K_n/K_0; — индекс потребительских цен I_p

11.11. ФЬЮЧЕРСНЫЕ КОНТРАКТЫ

Фьючерсный контракт — соглашение между двумя сторонами о будущей поставке предмета контракта, которое заключается на бирже.

В отличие от форвардного контракта исполнение фьючерсного гарантируется расчетной палатой биржи. После заключения фьючерсный контракт регистрируется, и биржа организует его вторичный рынок, т.е. этот контракт легко продать и купить.

Заключение фьючерсного контракта не требует от инвестора никаких расходов, кроме комиссионных. Сторона, которая обязуется поставить актив по контракту, открывает короткую позицию, т.е. продает фьючерсный контракт. Сторона, которая приобретает актив по контракту, открывает длинную позицию, т.е. покупает фьючерсный контракт. При этом покупатель и продавец вносят на счет брокерской компании (маржевый счет) некоторую сумму денег, которая называется *начальной маржей.* Нижний уровень начальной маржи устанавливается расчетной палатой.

Как правило, при помощи фьючерсных контрактов проводится хеджирование позиций контрагентов, или игра на разнице цен. В мировой практике только 2—5% контрактов заканчиваются реальной поставкой активов, остальные ликвидируются с помощью офсетных сделок (офсетная сделка — сделка, закрывающая открытую позицию). Если участник контракта желает поставить или принять актив, он информирует об этом расчетную палату, которая выбирает лицо с противоположной позицией и сообщает ему об этом.

Фьючерсная цена — цена поставки, которая фиксируется при заключении фьючерсного контракта и изменяется во времени. При росте в дальнейшем фьючерсной цены покупатель контракта выигрывает, а продавец проигрывает. При этом в конце каждого торгового дня расчетная палата переводит сумму выигрыша с маржевого счета проигравшей стороны на счет выигравшей. Эта сумма называется *переменной маржей.* Если на маржевом счете сумма превышает нижний уровень маржи, то инвестор может снять излишек со счета. Если эта сумма меньше, то инвестор обязан внести взнос, компенсирующий недостаток. Если инвестор не вносит требуемую сумму, то брокер ликвидирует его позицию с помощью офсетной сделки.

Будущая цена спот — цена актива в момент поставки. При заключении фьючерсного контракта фьючерсная цена может быть равной, превышать или быть ниже будущей цены спот.

Фьючерсные стратегии (спрэд) используются инвестором для снижения риска. Временный спрэд заключается в одновременной покупке и продаже фьючерсных контрактов на один и тот же актив с различными датами поставки.

Стратегия, предполагающая короткую позицию по ближнему контракту и длинную позицию по дальнему контракту, называется *спрэдом быка*.

Стратегия, предполагающая длинную позицию по ближнему контракту и короткую позицию по дальнему контракту, называется *спрэдом медведя*.

Если инвестор формирует спрэд быка, то говорят, что он покупает спрэд, а если спрэд медведя, то говорят, что он продает спрэд.

▷ **Пример 11.16.** Инвестор рассматривает прогноз работы с фьючерсными контрактами на поставку 10 000 долл. США по следующим ценам: 15 мая — 28 руб./долл.; 15 июня — 29,5 руб./долл.

Определить прибыли-убытки инвестора при формировании спрэда медведя из условия, что на следующей сессии:

1) цена доллара 15 мая упала до 26,5 руб./долл., а 15 июня — до 28 руб./долл.;

2) цена доллара 15 мая возросла до 29 руб./долл., а 15 июня — до 30,2 руб./долл.

Р е ш е н и е. Инвестор формирует спрэд медведя, т.е. покупает майский контракт и продает июньский.

Вариант 1. Прибыль инвестора по дальнему контракту составит:

$$П_д = (29{,}5 - 28) \cdot 10\,000 = 15\,000 \text{ руб.}$$

Убытки инвестора по ближнему контракту:

$$П_б = (26{,}5 - 28) \cdot 10\,000 = -15\,000 \text{ руб.}$$

Общие прибыли-убытки $П = П_д + П_б = 0$ руб.

Вариант 2. Убытки инвестора по дальнему контракту составят:

$$П_д = (29{,}5 - 30{,}2) \cdot 10\,000 = -7000 \text{ руб.}$$

Прибыль инвестора по ближнему контракту:

$$П_б = (29 - 28) \cdot 10\,000 = 10\,000 \text{ руб.}$$

Общие прибыли-убытки $П = П_д + П_б = 3000$ руб.

В варианте 1 ожидания инвестора не оправдались, его общая прибыль равна нулю. В варианте 2 ожидания инвестора оправдались, его доход составил 3000 руб. ◀

При формировании стратегии одновременно из трех контрактов используется спрэд быка (медведя) по ближнему и среднему контрактам и спрэд медведя (быка) по среднему и дальнему контрактам. Эта стратегия называется *спрэдом бабочки*. Если инвестор формирует спрэд быка по ближнему и среднему контрактам (продает ближний контракт и покупает средний) и спрэд медведя по среднему и дальнему контрактам (покупает средний контракт и продает дальний), то говорят, что он продает спрэд бабочки, и наоборот.

Пусть будущие цены актива (будущая сессия) по ближнему, среднему и дальнему контрактам равны A, B и C соответственно (табл. 11.2). В настоящий момент (настоящая сессия) цена актива составляет $A+a$, $B+b$ и $C+c$, где a, b и c — отклонения от будущих цен актива A, B и C.

Таблица 11.2

Контракт	*Настоящая сессия*	*Будущая сессия*
Ближний	$A+a$	A
Средний	$B+b$	B
Дальний	$C+c$	C

При покупке спрэда бабочки инвестор покупает ближний контракт $(A-A-a)$ и продает средний $(B+b-B)$ (спрэд медведя), продает средний контракт $(B+b-B)$ и покупает дальний $(C-C-c)$ (спрэд быка). Прибыли-убытки инвестора при покупке спрэда бабочки находятся по формуле

$$(A-A-a)+(B+b-B)+(B+b-B)+(C-C-c)=-a-c+2b.$$

При продаже спрэда бабочки инвестор продает ближний контракт $(A+a-A)$ и покупает средний $(B-B-b)$ (спрэд быка), покупает средний контракт $(B-B-b)$ и продает дальний $(C+c-C)$ (спрэд медведя). Прибыли-убытки такой стратегии находятся по формуле

$$(A+a-A)+(B-B-b)+(B-B-b)+(C+c-C)=a+c-2b.$$

Таким образом, прибыли зависят от величины отклонений цен, равных a, b и c, и от их знака.

▷ **Пример 11.17.** Инвестор рассматривает возможность работы с фьючерсными контрактами на поставку 10 000 долл. США по следующим курсам (настоящая сессия): 15 мая — 28 руб./долл.; 15 июня — 29,5 руб./долл.; 15 июля — 30,5 руб./долл.

Определить прибыли-убытки инвестора при покупке и продаже спрэда бабочки из условия, что на следующей сессии цены составят: 15 мая — 26,5 руб./долл.; 15 июня — 28 руб./долл.; 15 июля — 30 руб./долл.

Р е ш е н и е. 1. Инвестор покупает спрэд бабочки, т.е. он покупает ближний контракт $\left(A-A-a\right)$ и продает средний $\left(B+b-B\right)$ (спрэд медведя), а также продает средний контракт $\left(B+b-B\right)$ и покупает дальний $\left(C-C-c\right)$ (спрэд быка).

Прибыли-убытки инвестора по спрэду медведя составят:

$$\Pi_{\text{мед}}=(26,5-28)\cdot 10\,000+(29,5-28)\cdot 10\,000=0 \text{ руб.}$$

Прибыль инвестора по спрэду быка:

$$\Pi_{\text{бык}}=(29,5-28)\cdot 10\,000+(30-30,5)\cdot 10\,000=10\,000 \text{ руб.}$$

Общая прибыль $\Pi=\Pi_{\text{мед}}+\Pi_{\text{бык}}=10\,000$ руб.

2. Инвестор продает спрэд бабочки, т.е. продает ближний контракт $\left(A+a-A\right)$ и покупает средний $\left(B-B-b\right)$ (спрэд быка), а также покупает средний контракт $\left(B-B-b\right)$ и продает дальний $\left(C+c-C\right)$ (спрэд медведя).

Прибыли-убытки инвестора по спрэду быка составят:

$$\Pi_{\text{бык}}=(28-26,5)\cdot 10\,000+(28-29,5)\cdot 10\,000=0 \text{ руб.}$$

Убытки инвестора по спрэду медведя:

$$\Pi_{\text{мед}}=(28-29,5)\cdot 10\,000+(30,5-30)\cdot 10\,000=-10\,000 \text{ руб.}$$

Общие убытки $\Pi=\Pi_{\text{бык}}+\Pi_{\text{мед}}=-10\,000$ руб.

Тот же результат можно получить, используя приведенные выше формулы. Для этого определим

$$a=28-26,5=1,5, \quad b=29,5-28=1,5, \quad c=30,5-30=0,5.$$

При покупке спрэда бабочки прибыли-убытки инвестора в расчете на один доллар находятся по формуле

$$\Pi=\left(-a-c+2b\right)\cdot 10\,000=\left(-1,5-0,5+2\cdot 1,5\right)\cdot 10\,000=10\,000 \text{ руб.}$$

Прибыли-убытки приведены в расчете на 10 000 долл.

При продаже спрэда бабочки прибыль инвестора в расчете на 10 000 долл. составит:

$$\Pi = \left(a + c - 2b\right) \cdot 10\,000 = \left(1{,}5 + 0{,}5 - 2 \cdot 1{,}5\right) \cdot 10\,000 = -10\,000 \text{ руб.}$$

Рассчитанные двумя методами результаты совпали.◀

Межтоварный спрэд заключается в одновременной покупке и продаже фьючерсных контрактов на разные, но взаимозаменяемые товары, например на апельсины и грейпфруты. Прибыль инвестора в этом случае зависит от разности в изменении цен.

11.12. Опционы

Опционный контракт (опцион — *option*) на поставку товара в будущем дает следующие права его владельцу:

- купить товар по фиксированной цене (это опцион на покупку, или опцион колл (*coll*));
- продать товар по фиксированной цене (это опцион на продажу, или опцион пут (*put*)).

Владелец опциона может воспользоваться своим правом на покупку или продажу товара, а может и не воспользоваться. Продавец опциона обязан совершить указанную в опционе сделку (купить или продать товар) по требованию владельца опциона.

Американским называется опцион, предусматривающий совершение указанной в опционе сделки в любой момент до наступления срока погашения.

Европейским называется опцион, предусматривающий совершение указанной в опционе сделки в момент наступления срока погашения.

Премия — цена опциона, выплачиваемая покупателем опциона продавцу.

Короткий колл (*пут*) — продажа опциона, т.е. выписка опционного обязательства поставить (принять) товар по требованию владельца опциона.

Длинный колл (*пут*) — владение опционом на покупку (продажу).

Класс — это опционные контракты, в основе которых лежит один и тот же товар. Опционы колл и опционы пут образуют разные классы.

Серия — это опционы одного класса, выписанные на одинаковый срок по одинаковой цене исполнения.

Страйковая цена (страйк — *strike*) — это цена исполнения опциона, по которой продавец опциона обязан поставить или принять товар.

Рассмотрим европейский опцион колл (опцион на покупку). Пусть цена акции в момент погашения опциона равна S, а страйковая цена — S_0. Если в момент погашения $S \le S_0$, то владельцу опциона нет смысла ее покупать и его потери составит премия в размере F_0, уплаченная за опцион. Если же $S > S_0$, то прибыли-убытки составят $S - S_0 - F_0$. В общем виде выражение для прибылей-убытков принимает вид:

$$\Pi = \begin{cases} -F_0 & \text{при} \quad S \le S_0, \\ S - S_0 - F_0 & \text{при} \quad S > S_0. \end{cases}$$

Графически эта зависимость представлена на рис. 11.14.

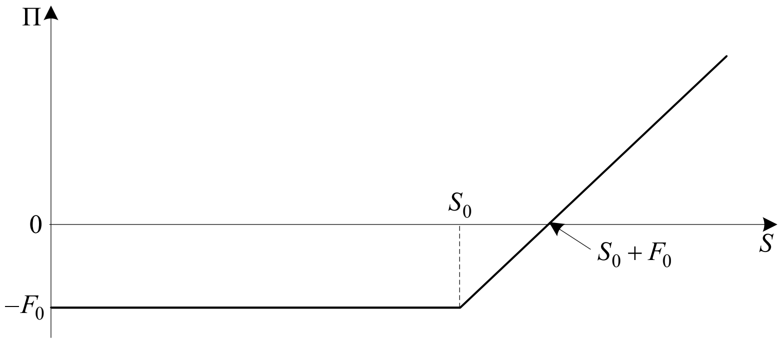


Рис. 11.14. **Зависимость прибылей-убытков владельца опциона колл**

Как следует из этого графика, покупатель опциона несет потери при цене спот актива в момент погашения меньше $S < S_0 + F$. При большей цене спот покупатель опциона имеет прибыль.

Для продавца европейского опциона колл результаты сделки будут противоположными. Расчет прибылей-убытков продавца проводится по формуле

$$\Pi = \begin{cases} F_0 & \text{при} \quad S \le S_0, \\ S_0 + F_0 - S & \text{при} \quad S > S_0. \end{cases}$$

Графически эта зависимость представлена на рис. 11.15.

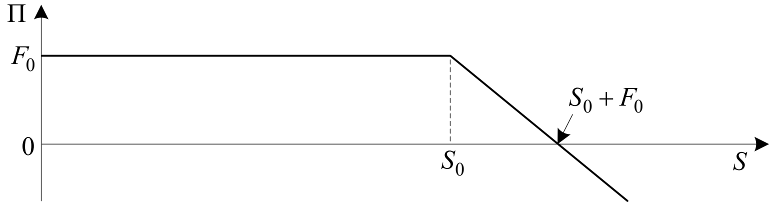


Рис. 11.15. **Зависимость прибылей-убытков продавца опциона колл**

В случае европейского опциона пут (опцион на покупку) при $S \le S_0$ его владелец реализует свое право на продажу акции, и его прибыли-убытки составят $S - S_0 - F_0$. Если же $S > S_0$, то покупатель своим правом не воспользуется. Таким образом, прибыли-убытки покупателя опциона пут составят:

$$\Pi = \begin{cases} S_0 - F_0 - S & \text{при} \quad S \le S_0, \\ -F_0 & \text{при} \quad S > S_0. \end{cases}$$

График этой зависимости имеет вид, представленный на рис. 11.16.

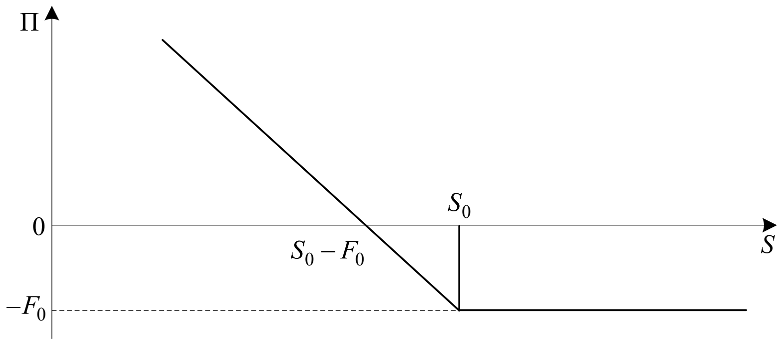


Рис. 11.16. **Зависимость прибылей-убытков владельца опциона пут**

Для продавца европейского опциона пут прибыли-убытки составят:

$$\Pi = \begin{cases} S - S_0 + F_0 & \text{при} \quad S \le S_0, \\ F_0 & \text{при} \quad S > S_0. \end{cases}$$

График этой функции представлен на рис. 11.17.

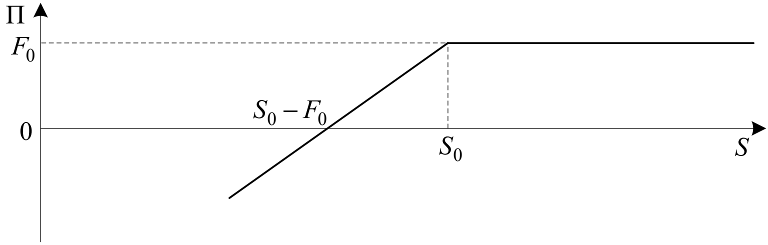


Рис. 11.17. **Зависимость прибылей-убытков продавца опциона пут**

▷ **Пример 11.18.** Инвестор купил европейский колл-опцион на 1000 акций по страйковой цене 10 руб. за акцию. Премия составила 50 коп. за акцию. Спотовая цена акции на момент поставки составила 12 руб.

Определить прибыли-убытки покупателя и продавца.

Р е ш е н и е. Для покупателя при $S \geq S_0$ прибыль на одну акцию равна:

$$П_1 = S - S_0 - F_0 = 12 - 10 - 0,5 = 1,5 \text{ руб.}$$

Прибыль на 1000 акций $П_{1000} = 1,5 \cdot 1000 = 1500$ руб.

Продавец понес убытки в размере 1500 руб. ◀

▷ **Пример 11.19.** Условия предыдущего примера для опциона пут.

Р е ш е н и е. Так как $S \geq S_0$, то покупатель не реализует свое право на продажу актива и понесет убытки в размере премии за 1000 акций, т.е.

$$П_{1000} = -1000F_0 = -1000 \cdot 0,5 = -500 \text{ руб.}$$

Прибыль продавца составит 500 руб. ◀

Все формулы справедливы и для американских опционов. При этом под S надо понимать текущую цену актива.

Опционы так же, как фьючерсные контракты, могут не предусматривать поставку товара, а быть расчетными.

Рассмотренные случаи покупки и продажи опционов относятся к одной из четырех групп опционных стратегий. Эта группа называется «*открытые позиции*». При открытой позиции продают (покупают) либо опцион, либо акции. Рассматривают ш е с т ь открытых позиций:

1) купить колл (опцион колл);
2) купить пут (опцион пут);
3) продать колл;
4) продать пут;

5) купить акцию;

6) продать акцию.

Помимо премии участниками сделки с опционами выплачиваются комиссионные и гарантийные платежи. При заключении сделки с опционами при исполнении контракта инвестор платит своему брокеру комиссионные. Продавец опционного контракта вносит на счет своего брокера в качестве залога маржу, которую брокер перечисляет на счет брокерской компании.

▷ **Пример 11.20.** Инвестор купил пять опционов колл с условием по каждому купить 100 акций по страйковой цене $S_0 = 30$ руб. за акцию. Премия за одну акцию $F_0 = 3$ руб. Комиссионные за покупку одного контракта $K =$ 40 руб. Цена акции в момент погашения опциона S =38 руб. (S =33,6 руб.). Коэффициент комиссионных по кассовой сделке 1,5% стоимости акции в момент погашения опциона.

Определить прибыль инвестора.

Р е ш е н и е. Прибыли-убытки инвестора составят $S - S_0 - F_0$ при $S > S_0$. Потери инвестора в данном случае увеличатся также за счет комиссионных по кассовой сделке на каждую акцию на величину, равную произведению коэффициента комиссионных на цену акции в момент погашения опциона, т.е. на rS. Таким образом, прибыли-убытки инвестора на каждую акцию составят $S - S_0 - F_0 - rS$. Для получения общей прибыли надо полученную величину умножить на количество акций по каждому опциону и на количество купленных опционов и из получившегося результата вычесть произведение комиссионных за покупку одного контракта и количества контрактов. В результате прибыль инвестора определяется по формуле

$$\Pi = l \cdot m \cdot \left(S - S_0 - F_0 - rS\right) - l \cdot K,$$

где l — количество купленных опционов колл; m — количество акций по каждому опциону; S — цена акции в момент погашения опциона; S_0 — страйковая цена; F_0 — премия за одну акцию; r — комиссионные по кассовой сделке от стоимости акции в процентах; K — комиссионные за покупку одного контракта.

По первому варианту прибыль составит:

$$\Pi = 5 \cdot 100 \cdot \left(38 - 30 - 3 - 0{,}015 \cdot 38\right) - 5 \cdot 40 = 2015 \text{ руб.}$$

По второму варианту

$$П = 5 \cdot 100 \cdot \left(33,6 - 30 - 3 - 0,015 \cdot 33,6\right) - 5 \cdot 40 = -152 \text{ руб.}$$

В первом варианте цена акции в момент погашения опциона превысила страйковую цену на ((38 − 30)/30) · 100 = 26,67%. Такое большое превышение привело к прибыли всего в 2015 руб. Во втором варианте цена акции в момент погашения опциона также превысила страйковую цену на ((33,6 − 30)/30) · 100 = 12%. Но несмотря на это, большие комиссионные сборы привели к потерям. ◀

Наиболее часто встречаются следующие четыре группы ***опционных стратегий***: открытые позиции, закрытые позиции, комбинации и спрэды. Основные открытые позиции рассмотрены выше. Теперь рассмотрим основные закрытые позиции.

При *закрытой* (*хеджированной*) *позиции* продают (покупают) акцию и опцион на нее. К закрытым позициям прибегают с целью хеджирования возможных потерь по акциям. При этом количество опционов, приходящихся на одну акцию, может быть различным. Отношение количества опционов к числу акций, находящихся в портфеле, называется *коэффициентом хеджирования*. Рассмотрим два из возможных вариантов.

1. Выписан один опцион колл и куплена одна акция. Результирующая зависимость прибылей-убытков от цены акции в момент погашения опциона представлена на рис. 11.18 (сплошная линия). Эта результирующая зависимость прибылей-убытков имеет такой же вид, как и соответствующая зависимость продавца опциона пут, представленная на рис. 11.17.

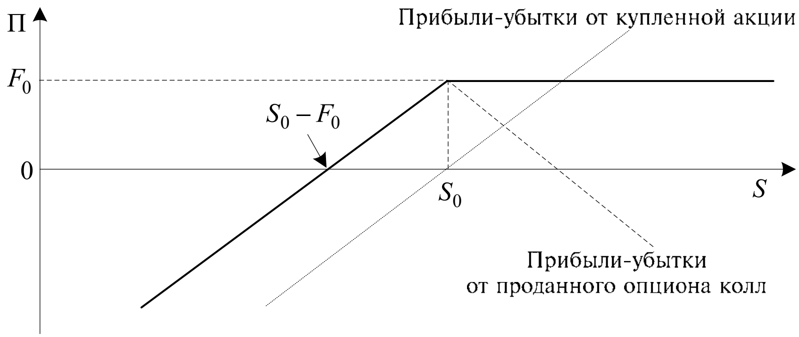


Рис. 11.18. **Прибыли-убытки от проданного опциона колл и купленной акции**

Эта стратегия позволяет уменьшить возможные потери от покупки акции на величину F_0. Но и прибыль при этом не превысит величины F_0 при любом увеличении цены акции S.

2. Продана одна акция и продан один опцион пут. Результирующая зависимость прибылей-убытков от цены акции в момент погашения опциона, представленная на рис. 11.19, соответствует зависимости прибылей-убытков для продавца одного опциона колл (см. рис. 11.15).

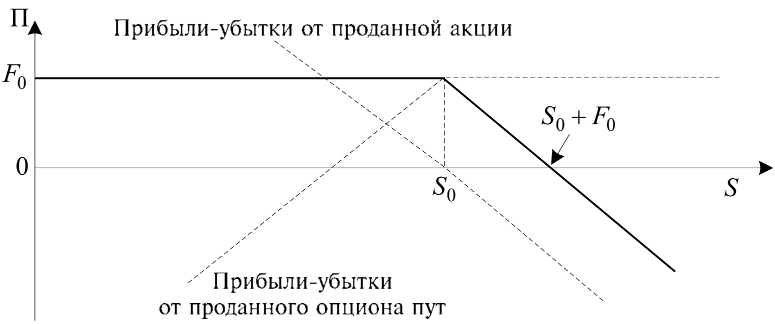


Рис. 11.19. **Прибыли-убытки от проданного опциона пут и проданной акции**

В отличие от форвардных и фьючерсных контрактов опцион уже в начальный момент имеет цену. Существуют различные подходы расчетов цены опциона. Один из них называется метод Блэка—Шоулза [3]. Формула Блэка—Шоулза для расчета цены европейского опциона колл имеет вид:

$$F = SN\left(d_1\right) - S_0 e^{-\delta \cdot T} N\left(d_2\right),$$

где $d_1 = \dfrac{\ln \dfrac{S}{S_0} + \left(\delta + 0{,}5\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$;, $d_2 = \dfrac{\ln \dfrac{S}{S_0} + \left(\delta - 0{,}5\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_2 - \sigma\sqrt{T}$;

$N\left(d\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{d} e^{x^2/2} dx$ — интеграл ошибок (вероятности); S — текущая рыночная цена акции; S_0 — цена исполнения; δ — годовая безрисковая сила роста; T — время истечения опциона в годах; σ — стандартное годовое отклонение цены акции.

Для расчета цены европейского опциона пут применяется формула

$$F = -SN\left(-d_1\right) + S_0 e^{-\delta \cdot T} N\left(-d_2\right),$$

где для расчета d_1 и d_2 используются формулы, приведенные выше.

Для приведенных здесь формул должны выполняться следующие условия:

- по акциям не выплачиваются дивиденды;
- рынок актива, положенного в основание опциона, является абсолютно ликвидным;
- цена покупки актива равна цене его продажи;
- отсутствуют комиссионные и налоги.

▷ **Пример 11.21.** Цена спот акции $S = 350$ руб. Цена исполнения через год на эту акцию $S_0 = 395$ руб. Безрисковая сила роста $\delta = 5\%$ годовых. Стандартное отклонения цены акции в конце года $\sigma_T = 0,2$.

Определить цену опциона колл и опциона пут с указанными характеристиками по формуле Блэка—Шоулза.

Р е ш е н и е. Найдем d_1 и d_2 по формулам

$$d_1 = \frac{\ln\frac{S}{S_0} + \left(\delta + 0,5\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{\ln\frac{350}{395} + 0,05 + 0,5 \cdot 0,2^2}{0,2} = -0,255;$$

$$d_2 = \frac{\ln\frac{S}{S_0} + \left(\delta - 0,5\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{\ln\frac{350}{395} + 0,05 - 0,5 \cdot 0,2^2}{0,2} = -0,455.$$

Цена опциона колл определяется по формуле

$$F = SN\left(d_1\right) - S_0 e^{-\delta \cdot T} N\left(d_2\right) = 350N\left(-0,255\right) - 395e^{-0,05}N\left(-0,455\right) = \\ = 350 \cdot 0,4 - 395e^{-0,05} \cdot 0,3 = 27,28 \text{ руб.}$$

Цена опциона пут определяется по формуле

$$F = -SN\left(-d_1\right) + S_0 e^{-\delta \cdot T} N\left(-d_2\right) = -350N\left(0,255\right) + 395e^{-0,05}N\left(0,455\right) = \\ = -350 \cdot 0,6 + 395e^{-0,05} \cdot 0,68 = 45,5 \text{ руб.}$$

◀

Упражнения

Тест 11.1. Выберите правильный вариант ответа.

Рассчитанным по простой арифметической средней является индекс:

A. Standard & Poor's 500.

B. РТС.

C. Нью-Йоркской фондовой биржи.

D. Доу-Джонса.

E. Интерфакса.

Тест 11.2. Если на графике цена акции падает во времени, то тренд называется:

- бычьим;
- медвежьим;
- боковым.

Тест 11.3. Акции котируются на бирже, если они:

- имеют высокий рейтинг;
- включены в котировальный лист.

Задача 11.1. Инвестор вкладывает 100 тыс. руб. на срок, равный одному году, и покупает страховой полис за 6 тыс. руб. Коэффициент страхового возмещения цены полиса q = 20. Доходности от вложения денег и от по покупки полиса предполагаются равными друг другу.

Определить доходность операции, а также годовую процентную ставку наращения.

Задача 11.2. Бескупонная облигация со сроком 7 лет, проценты и номинал по которой выплачиваются в конце срока, куплена за 12,5 тыс. руб. Номинал облигации равен 15 тыс. руб. Купонные проценты начисляются по ставке 10% годовых.

Определить доходность инвестиций.

Задача 11.3. Бескупонная облигация со сроком 5 лет куплена по курсу 85%.

Определить доходность инвестиций.

Задача 11.4. По купонной облигации проценты выплачиваются ежегодно в конце года по 1 тыс. руб. Срок облигации — 2 года, номинал 5 тыс. руб.

Определить цену облигации для ставки дисконтирования 10% и при ее изменении на ±2%, используя дюрацию и изгиб, а также только дюрацию.

Задача 11.5. Менеджер заключил 100 форвардных контрактов с обязательством поставить по 100 акций стоимостью 12 руб. за акцию по каждому контракту. В момент поставки цена акции составляла 11 руб. 73 коп.

Определить проигравшую сторону и величину потерь.

Задача 11.6. Форвардный контракт на 10 тыс. долл. заключен на срок один год. В момент заключения контракта курс доллара был равен 27 руб./долл., в момент окончания контракта курс доллара составил 33 руб./долл. Рублевый темп прироста цен за этот промежуток времени был равен 12%, а долларовый — 4%.

Найти отношение количества единиц иностранной валюты, купленной непосредственно на рынке, к количеству единиц иностранной валюты, купленной у продавца форвардного контракта.

Задача 11.7. Инвестор рассматривает прогноз работы с фьючерсными контрактами на поставку 1000 евро по следующим ценам: 1 февраля — 34,5 руб./евро; 1 марта — 35 руб./ евро.

Определить прибыли-убытки инвестора при формировании спрэда быка из условия, что на следующей сессии:

а) цена евро 1 февраля упала до 34 руб./евро, а 1 марта — до 34,6 руб./евро;

б) цена евро 1 февраля возросла до 34,8 руб./евро, а 1 марта — до 35,4 руб./евро.

Задача 11.8. Инвестор рассматривает возможность работы с фьючерсными контрактами на поставку 1000 евро по следующим курсам (настоящая сессия): 1 февраля — 34,5 руб./евро, 1 марта — 35 руб./ евро, 1 мая - 35,2 руб./ евро.

Определить прибыли-убытки инвестора при покупке и продаже спрэда бабочки из условия, что на следующей сессии цены составят: 1 февраля — 34,8 руб./евро, 1 марта — до 35,4 руб./евро, 1 мая — 35,4 руб./евро.

Библиографический список

1. *Демарк Т.Р.* Технический анализ — новая наука. М.: Диаграмма, 1997.
2. *Кузнецов Б.Т.* Инвестиции. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2007.
3. *Шарп У.Ф.*, *Александер Г. Дж.*, *Бэйли Д.В.* Инвестиции. М.: ИНФРА-М, 2006.

Глава 12

Портфель ценных бумаг

12.1. Характеристики портфеля ценных бумаг

Если инвестор покупает ценные бумаги хотя бы двух видов, например акции РАО ЕЭС и акции Ростелекома, то говорят о портфеле ценных бумаг [1—3].

Предположим, что портфель составлен из n-го числа различных видов ценных бумаг. Доходности каждой ценной бумаги являются случайными величинами. Пусть x_j — доля общего вложения, приходящаяся на j-й вид ценных бумаг, подчиняющаяся соотношению

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1. \qquad \textbf{(12.1)}$$

Ожидаемая доходность a_j j-й ценной бумаги, входящей в портфель, является математическим ожиданием доходности этой ценной бумаги. Ожидаемая доходность портфеля, являющаяся математическим ожиданием от суммарной доходности входящих в портфель ценных бумаг, вычисляется по формуле

$$a_p = \sum_{j=1}^{n} x_j a_j. \quad \textbf{(12.2)}$$

В качестве меры риска портфеля ценных бумаг считают среднее квадратичное отклонение его доходности, вычисляемое как корень квадратный из дисперсии. Дисперсия доходности портфеля определяется соотношением

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij}, \quad \textbf{(12.3)}$$

где σ_{ij} — ковариация случайных доходностей i-й и j-й ценных бумаг, вычисляемая по формуле

$$\sigma_{ij} = E\left\{\left(A_i - a_i\right)\left(A_j - a_j\right)\right\}, \quad \textbf{(12.4)}$$

где E — оператор математического ожидания; A_i, A_j — случайные доходности i-й и j-й ценных бумаг соответственно.

Предположим, что эффективности различных ценных бумаг не коррелированны, т.е. $\sigma_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Тогда **(12.4)** принимает вид:

$$\sigma_{jj} = E\left\{\left(A_j - a_j\right)^2\right\} = \sigma_j^2. \quad \textbf{(12.5)}$$

Таким образом, если $\sigma_{ij} = 0$ при $i \neq j$, то ковариация j-й ценной бумаги равна ее дисперсии. В этом случае формула для дисперсии доходности портфеля ценных бумаг **(12.3)** приобретает вид:

$$\sigma_p^2 = \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \sigma_j^2. \quad \textbf{(12.6)}$$

Если деньги вложены в ценные бумаги равными частями, т.е. $x_j = 1/n$, то формулы **(12.2)** и **(12.6)** можно записать в виде:

$$a_p = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_j; \quad \textbf{(12.7)}$$

$$\sigma_p = \frac{1}{n} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2}. \quad \textbf{(12.8)}$$

Рассмотрим возможность уменьшения риска снижения доходности за счет диверсификации (разнообразия) портфеля. Если в правую часть **(12.8)** вместо всех σ_j^2 подставить максимальное значение дисперсии $\sigma_{\max}^2$ из всего набора дисперсий σ_j^2, то получим неравенство

$$\sigma_p \le \frac{1}{n}\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\sigma_{\max}^2}.$$

Правая часть этого соотношения равна:

$$\frac{1}{n}\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\sigma_{\max}^2} = \frac{1}{n}\sqrt{n\sigma_{\max}^2} = \frac{\sigma_{\max}}{\sqrt{n}}.$$

Окончательно получим

$$\sigma_p \le \frac{\sigma_{\max}}{\sqrt{n}}. \qquad \textbf{(12.9)}$$

Из выражения **(12.9)** следует, что при росте числа видов ценных бумаг n, доходности которых не коррелированны, риск портфеля уменьшается и стремится к нулю при $n \to \infty$. Этот результат называется *эффектом диверсификации портфеля*.

Для анализа корреляции на величину риска портфеля ценных бумаг в формуле для дисперсии доходности **(12.3)** выразим ковариацию случайных доходностей A_i и A_j через коэффициент корреляции:

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}. \qquad \textbf{(12.10)}$$

Тогда **(12.3)** можно представить в виде:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\sigma_i x_i\right)\left(\sigma_j x_j\right)\rho_{ij}. \qquad \textbf{(12.11)}$$

Рассмотрим случай полной прямой корреляции $\rho_{ij} = 1$ и случай полной обратной корреляции $\rho_{ij} = -1$. При $\rho_{ij} = 1$ имеем:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\sigma_i x_i\right)\left(\sigma_j x_j\right) = \left(\sum_{i=1}^{n}\sigma_i x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\sigma_j x_j\right) = \left(\sum_{j=1}^{n}\sigma_j x_j\right)^2,$$

так как при суммировании по любой переменной получим один и тот же результат.

Если деньги вложены в ценные бумаги равными частями, т.е. $x_j = 1/n$, то

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{j=1}^{n}\sigma_j\right)^2; \ \sigma_p = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_j.$$

Если в правую часть последнего соотношения вместо всех σ_j подставить максимальное и минимальное значения стандартного отклонения из всего набора этих отклонений, то получим неравенство

$$\sigma_{\min} \le \sigma_p \le \sigma_{\max}.$$

Отсюда следует, что среднее квадратичное отклонение портфеля при полной прямой корреляции доходностей всех ценных бумаг будет иметь тот же порядок, что и стандартное отклонение отдельных ценных бумаг, т.е. диверсификация не дает положительного эффекта.

При полной обратной корреляции, т.е. при $\rho_{ij} = -1$, рассмотрим случай двух ценных бумаг. Для $i = j$ выражение для коэффициента корреляции, определяемого формулой **(12.10)**, принимает вид:

$$\rho_{jj} = \frac{\sigma_{jj}}{\sigma_j \sigma_j} = \frac{\sigma_j^2}{\sigma_j \sigma_j} = 1.$$

Подставив это в **(12.11)** и учитывая, что $n = 2$, получим:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\sigma_i x_i)(\sigma_j x_j)\rho_{ij} = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 - 2\sigma_1 x_1 \sigma_2 x_2 = (\sigma_1 x_1 - \sigma_2 x_2)^2.$$

Из этого выражения следует, что при полной обратной корреляции дисперсия доходности портфеля может быть равна нулю, т.е. риск отсутствует. Это имеет место при выполнении соотношения

$$\sigma_1 x_1 = \sigma_2 x_2.$$

Состав такого портфеля можно определить, решив систему из полученного уравнения и уравнения для долей портфеля **(12.1)**, т.е.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 - \dfrac{\sigma_2}{\sigma_1} x_2 = 0. \end{cases}$$

Решения этой системы имеют вид:

$$x_1 = \frac{\sigma_2/\sigma_1}{1+\sigma_2/\sigma_1}\ ;\ \ x_2 = \frac{1}{1+\sigma_2/\sigma_1}\ .$$

▷ **Пример 12.1.** В табл. 12.1 приведены характеристики четырех типов ценных бумаг.

Таблица 12.1

j	1	2	3	4
a_j, %	12	10	8	6
σ_j, %	2,5	1	0,4	0,4

1. Определить характеристики портфеля, состоящего из четырех типов ценных бумаг при равномерном вложении и при отсутствии корреляции доходностей между бумагами.
Р е ш е н и е. Для определения ожидаемой доходности и стандартного отклонения портфеля воспользуемся формулами **(12.7)** и **(12.8)**:

$$a_p = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j = \frac{1}{4}(12+10+8+6) = 9;$$

$$\sigma_p = \frac{1}{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sigma_j^2} = \frac{1}{4}\sqrt{2,5^2+1^2+0,4^2+0,4^2} = 0,688\ .$$

2. То же, что и в пункте 1 для второго, третьего и четвертого типов ценных бумаг.
Р е ш е н и е.

$$a_p = \frac{1}{3}(10+8+6) = 8;\ \ \sigma_p = \frac{1}{3}\sqrt{1^2+0,4^2+0,4^2} = 0,383\ .$$

3. То же, что и в пункте 1 для второго и третьего типов ценных бумаг.

Р е ш е н и е. $a_p = \frac{1}{2}(10+8) = 9;\ \ \sigma_p = \frac{1}{2}\sqrt{1^2+0,4^2} = 0,534.$

4. То же, что и в пункте 1 при полной прямой корреляции.
Р е ш е н и е. Ожидаемая доходность та же, что и в пункте 1. Стандартное отклонение определяется по формуле

$$\sigma_p = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_j = \frac{1}{4}(2,5+1+0,4+0,4) = 1,075.$$

5. Определить долю ценных бумаг портфеля, состоящего из первого и второго типов, при их полной обратной корреляции.

Решение. Доля ценных бумаг портфеля, состоящего из двух типов этих бумаг, при их полной обратной корреляции находится по формулам

$$x_1 = \frac{\sigma_2/\sigma_1}{1+\sigma_2/\sigma_1} = \frac{1/2,5}{1+1/2,5} = 0,286\,;$$

$$x_2 = \frac{1}{1+\sigma_2/\sigma_1} = \frac{1}{1+1/2,5} = 0,714\,. \blacktriangleleft$$

12.2. Портфель из двух типов ценных бумаг

Для каждого портфеля можно построить на графике ожидаемой доходности от стандартного отклонения точку, рассчитанную по формулам **(12.1)—(12.3)**. Рассмотрим частный случай двух видов ценных бумаг. Пусть доля портфеля бумаг первого типа равна x, а бумаг второго типа равна $1-x$. Введем следующие обозначения для математического ожидания доходностей бумаг первого и второго типов, их дисперсий и ковариации a_1; a_2; σ_1^2; σ_2^2; σ_{12} соответственно. Тогда **(12.2)** и **(12.3)** можно записать в виде:

$$\left.\begin{aligned} a_p &= xa_1 + (1-x)a_2, \\ \sigma_p^2 &= x^2\sigma_1^2 + (1-x)^2\sigma_2^2 + 2x(1-x)\sigma_{12}. \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(12.12)}$$

Система уравнений является функцией одной переменной $a_p(\sigma_p)$, заданной в параметрической форме. Параметром здесь является доля ценных бумаг x первого вида. Несколько графиков таких функций представлено на рис. 12.1. Некоторые из этих графиков имеют две ветви: верхнюю и нижнюю.

Найдем точку, в которой производная функции $a_p(\sigma_p)$ стремится к бесконечности. Поскольку функция **(12.12)** задана параметрически, т.е. $a_p(x)$ и $\sigma_p(x)$, то ее производную можно представить в виде:

$$\frac{da_p}{d\sigma_p} = \frac{da_p/dx}{d\sigma_p/dx} = \frac{2\cdot(a_1-a_2)\sigma_p}{2x\sigma_1^2 + 2(1-x)^2\sigma_2^2 + 2(1-x-x)\sigma_{12}}.$$

Искомая точка находится из уравнения

$$x_0\sigma_1^2 + (1-x_0)^2\sigma_2^2 + (1-2x_0)\sigma_{12} = 0.$$

Решая это уравнение относительно x_0, получим

$$x_0 = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}}. \qquad \textbf{(12.13)}$$

▷ **Пример 12.2.** Даны два типа ценных бумаг с характеристиками, приведенными в табл. 12.2.

Построить графики функции $a_p(\sigma_p)$.

Таблица 12.2

Номер примера	a_1	a_2	σ_1^2	σ_2^2	σ_{12}
1	0,07	0,15	0,45	0,9	0
2	0,07	0,15	0	0,9	0
3	0,07	0,15	0,45	0,9	0,3
4	0,07	0,15	0,45	0,9	−0,3
5	0,07	0,15	0,45	0,9	0,45
6	0,07	0,15	0,45	0,9	$\rho_{12} = 1$

Р е ш е н и е. Рассмотрим пример 1. Определим точку экстремума по формуле

$$x_0 = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}} = \frac{0,9}{0,45 + 0,9} = 0,667.$$

Составим таблицу (табл. 12.3).

Таблица 12.3

x	0	0,25	0,5	0,667	0,75	1,0
a_p	0,15	0,13	0,11	0,097	0,09	0,07
σ_p	0,949	0,731	0,581	0,548	0,556	0,671

График функции $a_p(\sigma_p)$ можно построить в Excel. Выделим строку доходности и, нажав на кнопку «Диаграмма», откроем окно «Тип диаграммы». Выберем тип диаграммы «Точечная» и «Вид» такой, какой вас больше устраивает. Нажать на кнопку «Далее». В появившемся диалоговом окне раскрыть вкладку «Ряд». Поставить курсор в поле «Значения X». Выделить строку рисков. Затем «Далее» $\to$ «Далее» $\to$ «Готово».

График, построенный по данным этой таблицы, представлен на рис. 12.1 ромбами. Эта кривая имеет вид «пули». $\sigma_p = 0,548$ — минимальное из всех возможных средних квадратичных отклонений, т.е. риск минимальный для структуры портфеля с долей бумаг первого типа $x = 0,667$ и с долей бумаг второго типа $1 - x = 0,333$. При этом ожидаемая доходность равна $a_p = 9,664\%$.

Для примера 2 можно записать:

$$\begin{cases} a_p = xa_1 + (1-x)a_2, \\ \sigma_p = (1-x)\sigma_2. \end{cases}$$

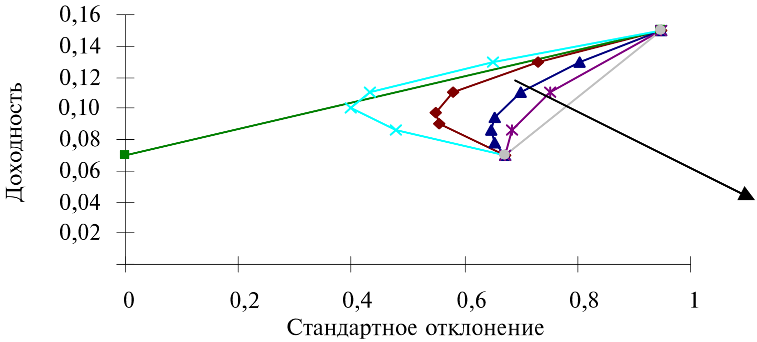


Рис. 12.1. **Графики доходности от риска оптимального портфеля:** — пример 1; — пример 2; — пример 3; — пример 4; — пример 5; — пример 6

Определим производную $\dfrac{da_p}{d\sigma_p} = \dfrac{da_p/dx}{d\sigma_p/dx} = \dfrac{a_2 - a_1}{\sigma_2}$. Так как производная постоянная, то исследуемая функция является отрезком прямой линии. Для $x = 1$ имеем $a_p = a_1$ и $\sigma_p = 0$. Если заданы точка, лежащая на прямой, и угловой коэффициент, то прямая определена. Ее уравнение имеет вид:

$$a_p = a_1 + \frac{a_2 - a_1}{\sigma_2}\sigma_p.$$

Подставив сюда исходные данные примера, получим искомую функцию

$$a_p = 0,07 + \frac{0,15 - 0,07}{\sqrt{0,9}}\sigma_p = 0,07 + 0,08433\sigma_p.$$

Отрезок прямой легко построить по двум точкам. Одна точка определена. Ее координаты (0; 0,07). Координаты второй точки находятся при $x = 0$. В этом случае $a_p = a_2$, $\sigma_p = \sigma_2$. Тогда координаты второй точки (0,15; 0,949). На рис. 12.1 искомая функция представлена в виде левого отрезка прямой линии. Здесь же представлены графики других примеров. Стрелка показывает направление возрастания ковариации ценных бумаг первого и второго типов.

Для примера 6 из условия $\rho_{12} = 1$ следует $\sigma_{12} = \sigma_1\sigma_2$. Тогда можно записать

$$\begin{cases} a_p = xa_1 + (1-x)a_2, \\ \sigma_p = x(\sigma_1 - \sigma_2) + \sigma_2. \end{cases}$$

Найдем производную $\dfrac{da_p}{d\sigma_p} = \dfrac{a_1 - a_2}{\sigma_1 - \sigma_2}$. Так как эта производная не зависит от стандартного отклонения портфеля, то искомая функция является отрезком прямой линии, соединяющим точки, координаты которых находятся из условий:

1) $x = 1 \quad \to \quad a_p = a_1; \quad \sigma_p = \sigma_1;$

2) $x = 0 \quad \to \quad a_p = a_2; \quad \sigma_p = \sigma_2.$

Для условий примера первая точка имеет координаты (0,671; 0,07), а вторая — координаты (0,949; 0,15). На рис. 12.1 искомая функция изображена в виде правого отрезка прямой. ◀

Как следует из приведенных примеров, вид функции $a_p(\sigma_p)$ существенным образом зависит от ковариации двух доходностей ценных бумаг. При увеличении ковариации растет риск (стандартное отклонение) при той же доходности.

12.3. Оптимальный портфель

Ожидаемая доходность портфеля **(12.2)** и его дисперсия **(12.3)** зависят от структуры портфеля, т.е. от типов ценных бумаг и их доли от общего вложения. Можно построить оптимальный портфель, минимизирующий риск при определенных условиях. Можно, например, минимизировать дисперсию **(12.3)** при фиксированном уровне доходности **(12.2)** и при нормировании весовых коэффициентов **(12.1)**. Такое решение минимизации риска впервые рассмотрено Марковицем [1—3]. Математическая формулировка задачи имеет вид:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij} \quad \to \quad \min \tag{12.14}$$

при

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} x_j a_j - a_p = 0, \\ &\sum_{j=1}^{n} x_j - 1 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{12.15}$$

Оптимальное решение ищется с помощью метода множителей Лагранжа. Функция Лагранжа для условий **(12.15)** имеет вид:

$$L = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij} + \lambda\left(\sum_{j=1}^{n} x_j a_j - a_p\right) + \mu\left(\sum_{j=1}^{n} x_j - 1\right). \tag{12.16}$$

Оптимальный портфель находится из решения относительно x_j, λ и μ системы линейных уравнений:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \frac{\partial L}{\partial \mu} = 0. \tag{12.17}$$

Для трех видов ценных бумаг функция Лагранжа приобретает вид:

$$\begin{aligned} L = x_1^2\sigma_{11} + x_2^2\sigma_{22} + x_3^2\sigma_{33} + 2x_1x_2\sigma_{12} + 2x_1x_3\sigma_{13} + 2x_2x_3\sigma_{23} + \\ +\lambda\left(x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 - a_p\right) + \mu\left(x_1 + x_2 + x_3 - 1\right). \end{aligned}$$

Отсюда находим систему линейных уравнений **(12.17)** при условии $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} &= 2x_1\sigma_{11} + 2x_2\sigma_{12} + 2x_3\sigma_{13} + a_1\lambda + \mu = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} &= 2x_1\sigma_{21} + 2x_2\sigma_{22} + 2x_3\sigma_{23} + a_2\lambda + \mu = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial x_3} &= 2x_1\sigma_{31} + 2x_2\sigma_{32} + 2x_3\sigma_{33} + a_3\lambda + \mu = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + 0\cdot\lambda + 0\cdot\mu = a_p, \\ \frac{\partial L}{\partial \mu} &= x_1 + x_2 + x_3 + 0\cdot\lambda + 0\cdot\mu = 1. \end{aligned}\right\} \tag{12.18}$$

Эта система из пяти линейных уравнений с пятью неизвестными может быть решена, например, матричным методом.

12.4. Определение состава оптимального портфеля

Иначе в общем виде систему из пяти линейных уравнений можно представить как

$$\begin{bmatrix} 2\sigma_{11} & 2\sigma_{12} & \ldots & 2\sigma_{1n} & a_1 & 1 \\ 2\sigma_{21} & 2\sigma_{22} & \ldots & 2\sigma_{2n} & a_2 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 2\sigma_{n1} & 2\sigma_{n2} & \ldots & 2\sigma_{nn} & a_n & 1 \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \\ \lambda \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \\ a_p \\ 1 \end{bmatrix}. \quad \textbf{(12.19)}$$

Введем обозначения. Обозначим матрицу риск-доходность через $A = \begin{bmatrix} 2\sigma_{11} & 2\sigma_{12} & \ldots & 2\sigma_{1n} & a_1 & 1 \\ 2\sigma_{21} & 2\sigma_{22} & \ldots & 2\sigma_{2n} & a_2 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 2\sigma_{n1} & 2\sigma_{n2} & \ldots & 2\sigma_{nn} & a_n & 1 \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, вектор $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \\ \lambda \\ \mu \end{bmatrix}$, а вектор правой части уравнения $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \\ a_p \\ 1 \end{bmatrix}$.

Тогда уравнение **(12.19)** можно записать в виде:

$$AX = B.$$

Решая это уравнение, получим формулу для определения неизвестных долей каждого типа рисковых ценных бумаг в оптимальном портфеле:

$$X = A^{-1}B, \quad \textbf{(12.20)}$$

где A^{-1} — обратная матрица по отношению к матрице A..

В матричной форме можно представить также в общем виде формулы **(12.1)—(12.3)**. При этом характеристики рисковых ценных бумаг задаются матрицей ковариаций σ, матрицей-столбцом ожидаемых доходностей a, матрицей-столбцом неизвестных долей x и единичной матрицей-столбцом I. Эти матрицы имеют вид:

$$\sigma = \left[\sigma_{ij}\right] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{1j} & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{2j} & \sigma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{i1} & \sigma_{i2} & \sigma_{ij} & \sigma_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \sigma_{nj} & \sigma_{nn} \end{bmatrix}, \qquad \textbf{(12.21)}$$

где σ_{ij} — ковариации случайных доходностей i-й и j-й рисковых ценных бумаг, $\sigma_{jj} = \sigma_j^2$.

$$a = \left[a_j\right] = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_j \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}; \; x = \left[x_j\right] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_j \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}; \; I = [1] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}. \qquad \textbf{(12.22)}$$

С учетом введенных обозначений формулы **(12.1)—(12.3)** принимают вид:

$$\sigma_p^2 = x'\sigma \cdot x; \quad a_p = a'x; \quad I'x = 1, \qquad \textbf{(12.23)}$$

где x', a', I' — транспонированные матрицы, в которых строки и столбцы поменялись местами.

Например, транспонированной по отношению к матрице b_{ij} является матрица b_{ji}.

12.5. Определение состава оптимального портфеля в Excel

▷ **Пример 12.3.** Даны три типа ценных бумаг с характеристиками, приведенными в табл. 12.4. Уровни доходностей ценных бумаг не коррелированны.

Таблица 12.4

j	1	2	3
a_j	0,05	0,1	0,15
σ_j^2	0,25	0,5	0,8

Определить зависимость состава оптимального портфеля от его ожидаемой доходности и построить график функции $a_p\left(\sigma_p\right)$ при оптимальном составе портфеля.

Р е ш е н и е. Построим матрицу риск-доходность:

$$A = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0 & 0,05 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0,1 & 1 \\ 0 & 0 & 1,6 & 0,15 & 1 \\ 0,05 & 0,1 & 0,15 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Вычислим обратную матрицу, используя Excel. Алгоритм вычисления обратной матрицы имеет следующий вид.

1. Выделить поле для записи обратной матрицы.

2. Нажать на кнопку « f_x ».

3. В категориях «Математические» выбрать функцию «МОБР».

4. Выделить преобразуемую матрицу.

5. OK.

6. F2 $\rightarrow$ одновременно нажать кнопки Ctrl + Shift + Enter.

В результате получим матрицу, обратную матрице A:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0,1639 & -0,3279 & 0,1639 & -11,8033 & 1,5082 \\ -0,3279 & 0,6557 & -0,3279 & 3,6066 & -0,0164 \\ 0,1639 & -0,3279 & 0,1639 & 8,1967 & -0,4918 \\ -11,8033 & 3,6066 & 8,1967 & -190,164 & 15,4098 \\ 1,5082 & -0,0164 & -0,4918 & 15,4098 & -1,5246 \end{bmatrix}.$$

Для нахождения столбца состава портфеля нужно перемножить две матрицы:

$$X = \begin{bmatrix} 0,1639 & -0,3279 & 0,1639 & -11,8033 & 1,5082 \\ -0,3279 & 0,0100 & -0,3279 & 3,6066 & -0,0164 \\ 0,1639 & -0,3279 & 0,1639 & 8,1967 & -0,4918 \\ -11,8033 & 3,6066 & -0,4918 & -137,7049 & 15,4098 \\ 1,5082 & 8,1967 & -0,0164 & 15,4098 & -1,5246 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ a_p \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Алгоритм вычисления произведения матриц имеет следующий вид.

1. Выделить поле для записи произведения матриц.

2. Нажать на кнопку « f_x ».

3. В категориях «Математические» выбрать функцию «МУМНОЖ».

4. Выделить первую матрицу.

5. Выделить вторую матрицу.

6. OK.

7. F2 $\rightarrow$ одновременно нажать кнопки Ctrl + Shift + Enter.

Для того чтобы компьютер вычислил произведение двух матриц, надо a_p задать в виде числа. Однако более целесообразно получить зависимость состава оптимального портфеля как функцию от доходности a_p. Для этих целей произведение двух матриц можно представить как сумму двух произведений матриц:

$$X = \begin{bmatrix} 0,1639 & -0,3279 & 0,1639 & -11,8033 & 1,5082 \\ -0,3279 & 0,0100 & -0,3279 & 3,6066 & -0,0164 \\ 0,1639 & -0,3279 & 0,1639 & 8,1967 & -0,4918 \\ -11,8033 & 3,6066 & -0,4918 & -137,7049 & 15,4098 \\ 1,5082 & 8,1967 & -0,0164 & 15,4098 & -1,5246 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} a_p +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0,1639 & -0,3279 & 0,1639 & -11,8033 & 1,5082 \\ -0,3279 & 0,0100 & -0,3279 & 3,6066 & -0,0164 \\ 0,1639 & -0,3279 & 0,1639 & 8,1967 & -0,4918 \\ -11,8033 & 3,6066 & -0,4918 & -137,7049 & 15,4098 \\ 1,5082 & 8,1967 & -0,0164 & 15,4098 & -1,5246 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -11,8033 \\ 3,6066 \\ 8,1967 \\ -137,7049 \\ 15,4098 \end{bmatrix} a_p + \begin{bmatrix} 1,5082 \\ -0,0164 \\ -0,4918 \\ 15,4098 \\ -1,5243 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11,8033a_p + 1,5082 \\ 3,6066a_p - 0,0164 \\ 8,1967a_p - 0,4918 \\ -137,7049a_p + 15,4098 \\ 15,4098a_p - 1,5243 \end{bmatrix}.$$

Доли ценных бумаг первого (x_1), второго (x_2) и третьего (x_3) типов представлены соответственно в первой, второй и третьей строках матрицы-столбца состава портфеля.

Используя нормировку **(12.1)**, можно провести проверку полученного результата. При этом сумма полученных зависимостей состава портфеля должна быть равна единице:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -11,8033a_p + 1,5082 +$$
$$+ 3,6066a_p - 0,0164 + 8,1967a_p - 0,4918 = 1.$$

Для построения графика $a_p(\sigma_p)$ для заданных доходностей проводят расчет состава портфеля и риска. Например, для $a_p = 0,1$ состав портфеля определяется соотношениями

$$x_1 = 0,32787; \quad x_2 = 0,34426; \quad x_3 = 0,32787.$$

Дисперсию портфеля находим по формуле

$$\sigma_p^2 = x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2 + x_3^2\sigma_3^2 = 0,32787^2 \cdot 0,25 + 0,34426^2 \cdot 0,5 +$$
$$+ 0,32787^2 \cdot 0,8 = 0,17213.$$

Стандартное отклонение $\sigma_p = 0,415$.

Результаты расчета представлены в табл. 12.5.

Таблица 12.5

a_p	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1	0,157
x_1	0,8	0,682	0,564	0,446	0,328	0,009
x_2	0,2	0,236	0,272	0,308	0,344	0,442
x_3	0	0,082	0,164	0,246	0,328	0,549
σ_p	0,424	0,387	0,372	0,382	0,415	0,582

Построение графика функции $a_p(\sigma_p)$ в Excel приведено в примере 12.2. График функции $a_p(\sigma_p)$ представлен на рис. 12.2.

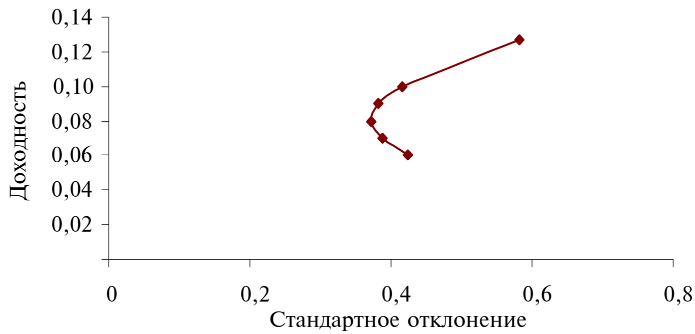


Рис. 12.2. **Доходность-риск оптимального портфеля** ◄

При увеличении или уменьшении ожидаемой доходности оптимального портфеля a_p по сравнению с граничными значениями, представленными в табл. 12.5, доли общего вложения x_j становятся отрицательными.

Из графика функции $a_p(\sigma_p)$ примера следует, что возможно существование экстремальной точки, в которой стандартное отклонение (дисперсия) портфеля имеет минимальное значение. Эту задачу можно решить с помощью метода множителей Лагранжа:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij} \quad \to \quad \min$$

при

$$\sum_{j=1}^{n} x_j - 1 = 0.$$

Целевая функция Лагранжа для этого условия имеет вид:

$$L = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij} + \mu \left(\sum_{j=1}^{n} x_j - 1 \right).$$

Координаты экстремальной точки x_j находятся из системы линейных уравнений

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial L}{\partial \mu} = 0.$$

Систему этих линейных уравнений можно решить матричным методом. Ее решение имеет вид:

$$\begin{bmatrix} 2\sigma_{11} & 2\sigma_{12} & ... & 2\sigma_{1n} & 1 \\ 2\sigma_{21} & 2\sigma_{22} & ... & 2\sigma_{2n} & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 2\sigma_{n1} & 2\sigma_{n2} & ... & 2\sigma_{nn} & 1 \\ 1 & 1 & ... & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Если матрицу риска обозначить через $\alpha = \begin{bmatrix} 2\sigma_{11} & 2\sigma_{12} & ... & 2\sigma_{1n} & 1 \\ 2\sigma_{21} & 2\sigma_{22} & ... & 2\sigma_{2n} & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 2\sigma_{n1} & 2\sigma_{n2} & ... & 2\sigma_{nn} & 1 \\ 1 & 1 & ... & 1 & 0 \end{bmatrix}$, вектор состава портфеля через $\chi = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \\ \mu \end{bmatrix}$, а вектор правой части через $\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, то систему уравнений можно записать в виде

$$\alpha \cdot \chi = \beta.$$

Найдем решение этого уравнения:

$$\chi = \alpha^{-1} \cdot \beta, \qquad \textbf{(12.24)}$$

где α^{-1} — матрица, обратная матрице α.

▷ **Пример 12.4.** Условия примера 12.3.

Определить состав оптимального портфеля для минимально возможной дисперсии в матричной форме.

Р е ш е н и е. Составим матрицу риска

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1,6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Найдем матрицу α^{-1}, обратную матрице риска α. Алгоритм вычисления обратной матрицы имеет следующий вид.

1. Выделить поле для записи обратной матрицы.

2. Нажать на кнопку « f_x ».

3. В категориях «Математические» выбрать функцию «МОБР».

4. Выделить преобразуемую матрицу.

5. ОК.

6. F2 $\to$ одновременно нажать кнопки Ctrl + Shift + Enter.

В результате получим матрицу, обратную матрице α:

$$\alpha^{-1} = \begin{bmatrix} 0,897 & -0,552 & -0,345 & 0,552 \\ -0,552 & 0,724 & -0,172 & 0,276 \\ -0,345 & -0,172 & 0,517 & 0,172 \\ 0,552 & 0,276 & 0,172 & -0,276 \end{bmatrix}.$$

Находим матрицу-столбец состава портфеля:

$$\chi = \begin{bmatrix} 0,897 & -0,552 & -0,345 & 0,552 \\ -0,552 & 0,724 & -0,172 & 0,276 \\ -0,345 & -0,172 & 0,517 & 0,172 \\ 0,552 & 0,276 & 0,172 & -0,276 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,552 \\ 0,276 \\ 0,172 \\ -0,276 \end{bmatrix}.$$

Доли ценных бумаг первого (x_1), второго (x_2) и третьего (x_3) типов представлены соответственно в первой, второй и третьей строках матрицы-столбца состава портфеля.

Стандартное отклонение портфеля равно:

$$\sigma_p = \sqrt{x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2 + x_3^2\sigma_3^2} =$$

$$= \sqrt{0,552^2 \cdot 0,25 + 0,276^2 \cdot 0,5 + 0,172^2 \cdot 0,8} = 0,372.$$

Ожидаемая доходность такого портфеля

$$a_p = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 = 0,552 \cdot 0,05 + 0,276 \cdot 0,1 + 0,172 \cdot 0,15 = 0,081.$$

Таким образом, при доходности портфеля 8,1% его стандартное отклонение $\sigma_p = 0,371$, а при доходности 9% имеем $\sigma_p = 0,382$ (см. пример 12.3), т.е. при увеличении доходности в 1,125 раз стандартное отклонение увеличилось в 1,03 раза. ◀

Эта экстремальная точка является исходной при анализе доходности и риска портфеля ценных бумаг. После определения этой точки инвестор будет знать ожидаемую доходность при минимально возможном риске. Так как в этой точке доходность растет существенно быстрее, чем стандартное отклонение, то инвестор имеет возможность изменить состав портфеля так, что ожидаемая доходность может заметно увеличиться при незначительном увеличении риска. При этом необходимо иметь в виду, что изменение состава портфеля на заданную величину стандартного отклонения может как увеличить, так и уменьшить ожидаемую доходность.

Метод выбора оптимального состава портфеля можно свести к следующему. Выбрав тип ценных бумаг, инвестор рассчитывает состав портфеля для минимально возможной дисперсии. Затем рассчитывается минимально возможное стандартное отклонение и соответствующая ему ожидаемая доходность. Если инвестор предпочитает повысить ожидаемую доходность, то он для ряда новых доходностей определяет стандартное отклонение по приведенной выше методике Марковца и выбирает приемлемый для себя вариант.

12.6. Оптимальный портфель с добавлением безрисковых ценных бумаг

Доходность безрисковой ценной бумаги будем обозначать a_0. Риск такой бумаги равен нулю, т.е. дисперсия $\sigma_0{}^2 = 0$. При добавлении в портфель ценных бумаг безрискового актива зависимость доходности портфеля от риска трансформируется в отрезок прямой линии. Ее график представлен на рис. 12.3. Кривая линия на графике характеризует зависимость доходности от риска портфеля, составленного только из рисковых ценных бумаг. Из графиков видно, что прямая линия касается кривой в точке K.

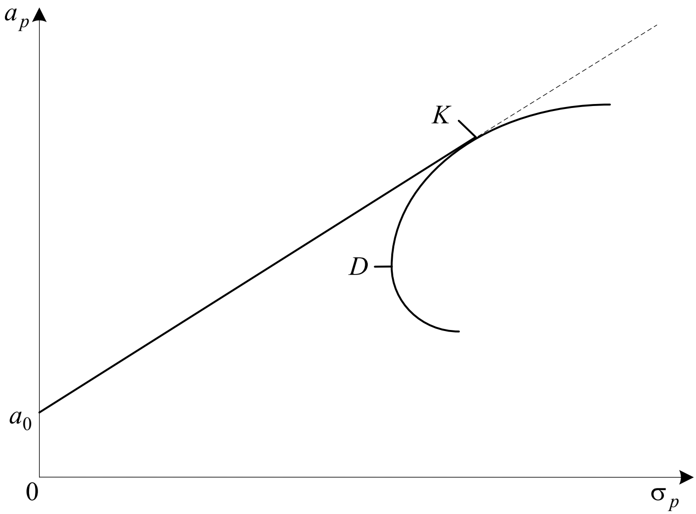


Рис. 12.3. **Графики доходности оптимального портфеля от его стандартного отклонения**

Если инвестор захочет сформировать портфель из трех видов ценных бумаг, то инвестиционный менеджер предложит ему зависимость, представленную в виде графика прямой, по которой он выберет точку с приемлемыми для него доходностью и стандартным отклонением.

12.7. Алгоритм построения оптимального портфеля ценных бумаг

Для построения функции ожидаемой доходности портфеля, состоящего из безрисковых ценных бумаг и n типов рисковых ценных бумаг, используется следующий алгоритм.

1. Определяют состав оптимального портфеля из n типов рисковых ценных бумаг для экстремальной точки на кривой $a_p(\sigma_p)$ (точка D на рис. 12.3) по формуле $\chi = \alpha^{-1} \cdot \beta$.

2. Определяют доходность и дисперсию в экстремальной точке по формулам **(12.2)** и **(12.3)** или по формулам **(12.23)**.

3. Задаются рядом значений доходности портфеля, состоящего из n типов рисковых бумаг, бо́льших и меньших, чем доходность в экстремальной точке. Для каждой из доходностей определяют состав оптимального портфеля по формуле **(12.20)**, а затем дисперсию — по формуле **(12.23)**.

4. По полученным результатам строят график $a_p(\sigma_p)$ для оптимального портфеля, состоящего из рисковых ценных бумаг.

5. Определяют координаты точки касания. Для этих целей составляют матрицу риск-доходность

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2\sigma_{01} & \ldots & 2\sigma_{0n} & a_0 & 1 \\ 2\sigma_{10} & 2\sigma_{11} & \ldots & 2\sigma_{1n} & a_1 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 2\sigma_{n0} & 2\sigma_{n1} & \ldots & 2\sigma_{nn} & a_n & 1 \\ a_0 & a_1 & \ldots & a_n & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

и находят для этой матрицы обратную матрицу

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & \ldots & a_{0n} & a_{0,n+1} & a_{0,n+2} \\ a_{10} & a_{11} & \ldots & a_{1n} & a_{1,n+1} & a_{1,n+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n0} & a_{n1} & \ldots & a_{nn} & a_{n,n+1} & a_{n,n+2} \\ a_{n+1,0} & a_{n+1,1} & \ldots & a_{n+1,n} & a_{n+1,n+1} & a_{n+1,n+2} \\ a_{n+2,0} & a_{n+2,1} & \ldots & a_{n+2,n} & a_{n+2,n+1} & a_{n+2,n+2} \end{bmatrix}.$$

Состав портфеля ценных бумаг определяется соотношением

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \ldots \\ x_n \\ \lambda \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & \ldots & a_{0n} & a_{0,n+1} & a_{0,n+2} \\ a_{10} & a_{11} & \ldots & a_{1n} & a_{1,n+1} & a_{1,n+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n0} & a_{n1} & \ldots & a_{nn} & a_{n,n+1} & a_{n,n+2} \\ a_{n+1,0} & a_{n+1,1} & \ldots & a_{n+1,n} & a_{n+1,n+1} & a_{n+1,n+2} \\ a_{n+2,0} & a_{n+2,1} & \ldots & a_{n+2,n} & a_{n+2,n+1} & a_{n+2,n+2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \\ a_p \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Отсюда находим формулу для определения доходности a_p в точке касания. В общем случае

$$x_0 = a_{0,n+1} \cdot a_p + a_{0,n+2}.$$

Так как в точке касания $x_0 = 0$, то $a_p = -\dfrac{a_{0,n+2}}{a_{0,n+1}}$.

6. Определяют структуру портфеля, состоящего из рисковых бумаг, в точке касания по формуле

$$\begin{bmatrix} 0 \\ x_1 \\ \dots \\ x_n \\ \lambda \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0n} & a_{0,n+1} & a_{0,n+2} \\ a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1n} & a_{1,n+1} & a_{1,n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n0} & a_{n1} & \dots & a_{nn} & a_{n,n+1} & a_{n,n+2} \\ a_{n+1,0} & a_{n+1,1} & \dots & a_{n+1,n} & a_{n+1,n+1} & a_{n+1,n+2} \\ a_{n+2,0} & a_{n+2,1} & \dots & a_{n+2,n} & a_{n+2,n+1} & a_{n+2,n+2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ a_p \\ 1 \end{bmatrix}.$$

7. Определяют дисперсию в точке касания по формулам **(12.3)** или **(12.24)**.

8. На оси a_p откладывают точку, координата которой равна доходности безрисковой ценной бумаги a_0.

9. Через эту точку проводят прямую, касательную к функции $a_p(\sigma_p)$ для оптимального портфеля, состоящего из рисковых ценных бумаг (см. рис. 12.3). Отрезок, соединяющий точку на оси a_p и точку касания K, является искомой функцией ожидаемой доходности портфеля.

10. Инвестор в соответствии со своей склонностью к риску может указать точку на отрезке прямой доходность-риск или задать только стандартное отклонение, характеризующее его отношение к риску. По формуле

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \dots \\ x_n \\ \lambda \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0n} & a_{0,n+1} & a_{0,n+2} \\ a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1n} & a_{1,n+1} & a_{1,n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n0} & a_{n1} & \dots & a_{nn} & a_{n,n+1} & a_{n,n+2} \\ a_{n+1,0} & a_{n+1,1} & \dots & a_{n+1,n} & a_{n+1,n+1} & a_{n+1,n+2} \\ a_{n+2,0} & a_{n+2,1} & \dots & a_{n+2,n} & a_{n+2,n+1} & a_{n+2,n+2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ a_p \\ 1 \end{bmatrix}$$

определяют состав портфеля инвестора.

▷ **Пример 12.5.** Даны четыре типа ценных бумаг, три из которых — рисковые (j = 1, 2, 3) и одна — безрисковая (j = 0), с характеристиками, приведенными в табл. 12.6.

Таблица 12.6

j	0	1	2	3
a_j	0,04	0,05	0,1	0,15
σ_j^2	0	0,25	0,5	0,8

Доходности ценных бумаг не коррелированны.
Определить функцию ожидаемой доходности портфеля, состоящего из этих бумаг, от стандартного отклонения, а также доходность и состав портфеля инвестора при выборе им стандартного отклонения портфеля $\sigma_{p,u} = 0,3$.

Р е ш е н и е. 1—4. Следует обратить внимание на то, что в состав портфеля вошли те же ценные рисковые бумаги, что и в предыдущих двух примерах. Состав такого оптимального портфеля был определен, и была построена функция $a_p = \sigma\left(a_p\right)$ (см. рис. 12.2). Данные представлены также в табл. 12.5.
5. Для определения координаты точки касания составим матрицу риск-доходность:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0,04 & 1 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0,05 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0,1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1,6 & 0,15 & 1 \\ 0,04 & 0,05 & 0,1 & 0,15 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

и найдем для этой матрицы обратную матрицу:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1,677668 & -1,73817 & -0,21452 & 0,275028 & -13,0913 & 1,523652 \\ -1,73817 & 1,964796 & -0,10561 & -0,12101 & 1,760176 & -0,07041 \\ -0,21452 & -0,10561 & 0,683168 & -0,36304 & 5,280528 & -0,21122 \\ 0,275028 & -0,12101 & -0,36304 & 0,209021 & 6,050605 & -0,24202 \\ -13,0913 & 1,760176 & 5,280528 & 6,050605 & -88,0088 & 3,520352 \\ 1,523652 & -0,07041 & -0,21122 & -0,24202 & 3,520352 & -0,14081 \end{bmatrix}.$$

Доходность в точке касания равна

$$a_p = -\frac{a_{0,n+2}}{a_{0,n+1}} = -\frac{1,523652}{-13,0913} = 0,1164\,.$$

6. Найдем структуру портфеля, состоящего из рисковых бумаг, в точке касания:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1,677668 & -1,73817 & -0,21452 & 0,275028 & -13,0913 & 1,523652 \\ -1,73817 & 1,964796 & -0,10561 & -0,12101 & 1,760176 & -0,07041 \\ -0,21452 & -0,10561 & 0,683168 & -0,36304 & 5,280528 & -0,21122 \\ 0,275028 & -0,12101 & -0,36304 & 0,209021 & 6,050605 & -0,24202 \\ -13,0913 & 1,760176 & 5,280528 & 6,050605 & -88,0088 & 3,520352 \\ 1,523652 & -0,07041 & -0,21122 & -0,24202 & 3,520352 & -0,14081 \end{bmatrix} \times$$

$$\times\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,1164 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,00018 \\ 0,134477 \\ 0,403432 \\ 0,462266 \\ -6,72387 \\ 0,268955 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, состав портфеля в точке касания:

$$x_1 = 0,134; \quad x_2 = 0,403; \quad x_3 = 0,463.$$

7. Найдем дисперсию в точке касания по формуле **(12.3)**:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij} = 0,134^2 \cdot 0,25 + 0,403^2 \cdot 0,5 +$$

$$+ 0,463^2 \cdot 0,8 = 0,25683; \quad \sigma_p = 0,51.$$

8. По оси ординат откладываем координату, соответствующую доходности безрискового актива (рис. 12.4).

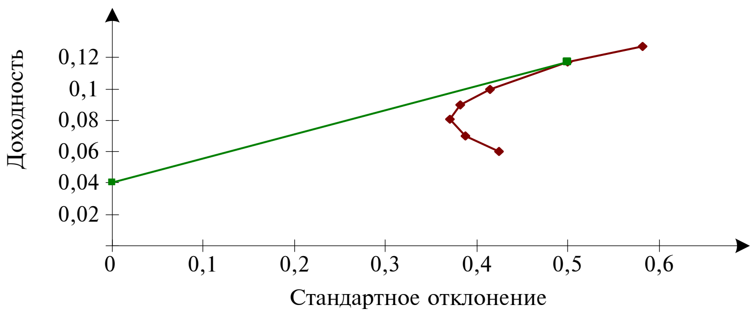


Рис. 12.4. **Графики доходность-риск**

9. Проводим через эту точку прямую, касательную к функции доходности от стандартного отклонения рискового портфеля. Точка касания имеет координаты $\sigma_{p,k} = 0,51$; $a_{p,k} = 0,116$.

10. Риск портфеля, выбранный инвестором, составляет $\sigma_{p,u} = 0,3$. Связь доходности, желаемой инвестором, с желаемым риском определяется соотношением

$$a_{p,u} = \left(a_{p,k} - a_0\right)\frac{\sigma_{p,u}}{\sigma_{p,k}} + a_0 = \left(0,116 - 0,04\right)\frac{0,3}{0,51} + 0,04 = 0,085.$$

$$X = \begin{bmatrix} 1,677668 & -1,73817 & -0,21452 & 0,275028 & -13,0913 & 1,523652 \\ -1,73817 & 1,964796 & -0,10561 & -0,12101 & 1,760176 & -0,07041 \\ -0,21452 & -0,10561 & 0,683168 & -0,36304 & 5,280528 & -0,21122 \\ 0,275028 & -0,12101 & -0,36304 & 0,209021 & 6,050605 & -0,24202 \\ -13,0913 & 1,760176 & 5,280528 & 6,050605 & -88,0088 & 3,520352 \\ 1,523652 & -0,07041 & -0,21122 & -0,24202 & 3,520352 & -0,14081 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,085 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,410891 \\ 0,079208 \\ 0,237624 \\ 0,272277 \\ -3,9604 \\ 0,158416 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, доля различных ценных бумаг в портфеле составит:

$$x_0 = 0,411; \quad x_1 = 0,079; \quad x_2 = 0,238; \quad x_3 = 0,272.$$

Следует обратить внимание на то, что риск портфеля, равный 0,3, меньше риска самой малорисковой ценной бумаги, риск которой равен 0,5. С другой стороны, доходность портфеля, равная 8,5% годовых, больше доходности самой малорисковой ценной бумаги, доходность которой равна 5% годовых. ◀

12.8. Рыночный портфель

Рыночный портфель формируется из всех рисковых ценных бумаг, существующих на рынке, и определяется при равновесии на фондовом рынке. Равновесие на конкурентном рынке имеет место в том случае, если все его участники располагают одинаковой информацией и формируют на ее основе оптимальный портфель. При наличии равновесия предложение рисковых и безрисковых ценных бумаг равно спросу. При отсутствии равновесия вступает в действие закон конкурентного рынка, т.е. цена бумаг, спрос на которые превышает предложение, будет расти, и наоборот. При этом эффективности первых будут расти, а вторых падать. На основании информации об этом каждый инвестор скорректирует структуру рисковой части своего портфеля. В результате на рынке устанавливается равновесие. В этом случае распределение на рынке рисковых ценных бумаг по видам будет близко к распределению ценных бумаг в оптимальном портфеле. Задачу о доле капитала, вкладываемого в безрисковую и рисковую части портфеля, каждый инвестор решает сам. Эта доля зависит от склонности инвестора к риску.

Если из рисковых ценных бумаг, существующих на рынке, построить оптимальный портфель по Марковцу для различных доходностей, то получим известный график в виде кривой линии, показанный на рис. 12.5.

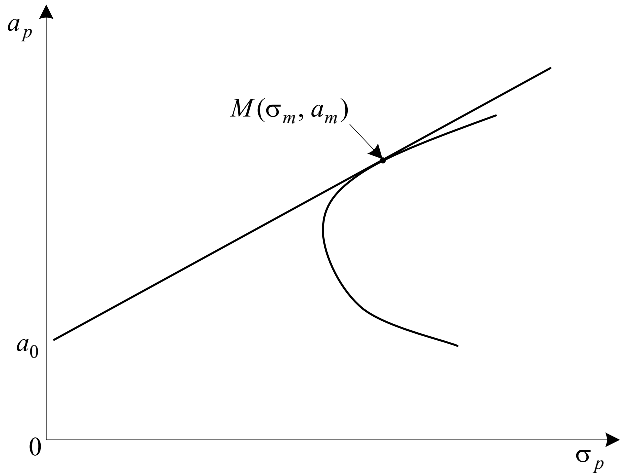


Рис. 12.5. **Доходность-риск рыночного портфеля**

При наличии в портфеле безрискового актива с доходностью a_0 функция $a_p(\sigma_p)$ является отрезком прямой, соединяющей точку с координатой a_0, лежащую на оси ординат, и точку касания *M*. Точка *M* является рыночным портфелем (market portfolio). Доходность рыночного портфеля в этой точке равна a_m, а стандартное отклонение — σ_m. Пропорция инвестиций в каждую ценную бумагу рыночного портфеля равна доли этой бумаги в общей капитализации рынка.

Любой инвестор, формирующий оптимальный рыночный портфель, будет выбирать доходность и риск (стандартное отклонение) так, чтобы они лежали на отрезке прямой. При этом структура рисковой части оптимального портфеля (точка M на рис. 12.5) полностью определяется вероятностными характеристиками ценных бумаг и не зависит от склонности инвестора к риску.

Прямая линия, проходящая через точки a_0 и M, называется *основной рыночной линией* (Capital Market Line — CML). Тангенс угла наклона этой прямой называется *рыночной ценой риска* и вычисляется по формуле

$$k = \frac{a_m - a_0}{\sigma_m},$$

где a_m — доходность рыночного портфеля.

▷ **Пример 12.6.** Доходность безрискового актива равна 4% годовых, а доходность рыночного портфеля — 12% годовых. Дисперсия доходности рыночного портфеля равна 0,04.

Определить рыночную цену риска.

Р е ш е н и е. Стандартное отклонение рыночного портфеля равно $\sigma_m = \sqrt{0,02} = 0,2$, или 20%.

Рыночная цена риска вычисляется по формуле

$$k = \frac{a_m - a_0}{\sigma_m} = \frac{0,12 - 0,04}{0,2} = 0,4. \blacktriangleleft$$

Сформировать портфель из всех ценных бумаг рынка не представляется возможным. Поэтому при формировании рыночного портфеля используют те или другие индексы деловой активности. Ясно, что характеристики этих индексов всегда отличаются от характеристик рынка в целом. Тем не менее такое упрощение часто используется. В России можно использовать индекс Интерфакса (сводный), где совокупность компаний — 65 и начальное значение — 100, или индекс РТС (Российской торговой системы), где совокупность компаний — 24 и начальное значение — 100. При расчете этих индексов рыночная стоимость на момент оценки всех акций компаний, входящих в совокупность, делится на стоимость всех этих акций в базисный момент времени. Затем результат умножается на начальное значение. Поэтому в базисный момент индекс равен начальному значению. Значит, чем больше совокупность компаний, тем точнее индексы отображают изменение цены рыночного портфеля. В США в качестве такого индекса может быть использован индекс Standard & Poor's 500, где совокупность компаний — 500 и начальное значение — 10.

12.9. Эффективный рынок ценных бумаг

Рынок ценных бумаг является эффективным в том случае, если инвесторы располагают обширной и легкодоступной информацией и если вся эта информация уже отражена в ценах ценных бумаг. Понятие эффективного рынка разработано на основании трудов М. Кендалла [1], который в начале 1950-х гг. установил, что изменения цен на акции от периода к периоду не зависят друг от друга. До этого предполагалось, что цены на акции имеют регулярные циклы. Исследования показали, что, например, коэффициент корреляции между изменением цен любого дня и следующего за ним дня составляет сотые доли. Это указывает на незначительную тенденцию, например, к дальнейшему повышению цен вслед за первоначальным повышением.

Независимое поведение цен следует ожидать только на конкурентном рынке.

В соответствии с гипотезой эффективности рынка невозможно составить точные прогнозы поведения цен на ближайшие дни. Высокая эффективность портфелей ценных бумаг одних менеджеров, занимающихся ежедневной куплей-продажей акций, по сравнению с другими объясняется в соответствии с этой гипотезой не их компетентностью, а чистой случайностью.

Заметим, однако, что за длительные периоды, составляющие десятки лет, наблюдается тенденция к росту цен акций. По данным [1], в США за период с 1926 по 1988 г. среднегодовая номинальная доходность по акциям составила 12,1% годовых, а эта же доходность за вычетом инфляции была равна 8,8% годовых.

Упражнения

Задача 12.1. Даны два типа ценных бумаг с характеристиками: $a_1 = 0{,}12$; $a_2 = 0{,}2$; $\sigma_1^2 = 0{,}6$; $\sigma_2^2 = 0{,}9$; $\sigma_{12} = 0{,}2$.

Построить график зависимости ожидаемой доходности портфеля от риска.

Задача 12.2. Даны два типа ценных бумаг с характеристиками: $a_1 = 0{,}15$; $a_2 = 0{,}3$; $\sigma_1^2 = 0{,}8$; $\sigma_2^2 = 1{,}2$; $\sigma_{12} = 0{,}3$.

Построить график зависимости ожидаемой доходности портфеля от риска.

Задача 12.3. Даны три типа ценных бумаг с характеристиками, приведенными в табл. 12.7. Уровни доходностей ценных бумаг не коррелированны.

Таблица 12.7

j	1	2	3
a_j	0,09	0,16	0,22
σ_j^2	0,5	0,8	1,4

Определить зависимость состава оптимального портфеля от его ожидаемой доходности в матричной форме, включая точку для минимально возможной дисперсии, и построить график функции $a_p\left(\sigma_p\right)$ при оптимальном составе портфеля.

Задача 12.4. Даны четыре типа ценных бумаг, три из которых – рисковые, такие же, как и в задаче 12.3, и один – безрисковый. Характеристики ценных бумаг представлены в табл. 12.8.

Таблица 12.8

j	0	1	2	3
a_j	0,06	0,09	0,16	0,22
σ_j^2	0	0,5	0,8	1,4

Доходности ценных бумаг не коррелированны.

Определить и построить график функции ожидаемой доходности портфеля, состоящего из этих бумаг, от среднего квадратичного отклонения, а также доходность и состав портфеля инвестора при выборе им средней доходности портфеля $a_{p,u} = 14\%$ годовых.

Библиографический список

1. *О'Брайен Дж.*, *Шривастава С.* Финансовый анализ и торговля ценными бумагами. М.: Дело Лтд, 1995.
2. *Кузнецов Б.Т.* Инвестиции. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2007.
3. *Шарп У.Ф.*, *Александер Г.Дж.*, *Бэйли Д.В.* Инвестиции. М.: ИНФРА-М, 2006.

Часть IV

Формирование государственного бюджета

Глава 13. Налоговая система и государственный бюджет

Глава 13

Налоговая система и государственный бюджет

13.1. Фискальная политика государства

Под *фискальной бюджетно-налоговой политикой* государства понимают систему мер, направленных на регулирование экономики путем сбора налогов, формирования бюджета и расходования средств этого бюджета.

Налоги — обязательные сборы, взимаемые государством с предприятий и населения [1—5]. Налоговые сборы носят принудительный характер.

Различают дискреционную и недискреционную фискальную политику [2].

Дискреционная фискальная политика — сознательное изменение со стороны государственных органов ставок налогообложения, государственных расходов, дефицита или профицита государственного бюджета с целью влияния на величину валового внутреннего продукта, уровень занятости, инфляцию.

Недискреционная фискальная политика — автоматическое изменение налоговых поступлений и государственных расходов за счет действия встроенных стабилизаторов.

Встроенным стабилизатором называется экономический механизм, автоматически регулирующий колебания занятости и выпуска. Примером встроенных стабилизаторов являются прогрессивная шкала подоходного налога, пособия по безработице и бедности. На фазе подъема экономики встроенные стабилизаторы приводят к увеличению налоговых поступлений, снижению пособий и уменьшению дефицита государственного бюджета.

13.2. Налоговые органы Российской Федерации

К налоговым органам Российской Федерации относится Министерство РФ по налогам и сборам, Государственный таможенный комитет РФ, Федеральная служба налоговой полиции РФ, государственные внебюджетные фонды, Министерство финансов РФ.

1. Основной функцией Министерства РФ по налогам и сборам является контроль над полнотой и своевременностью выплат налогов и других обязательных платежей. В обязанности этого министерства и его подразделений входят также учет всех налогоплательщиков с получением и проверкой отчетной документации, предъявление исков в судебные органы, контроль и изъятие документов у недобросовестных налогоплательщиков, приостановление операций по счетам.

2. Основной задачей Государственного таможенного комитета РФ и его подразделений является взимание налогов и сборов при транспортировке товаров через границу. В состав Государственного таможенного комитета РФ входят региональные таможенные управления РФ, таможни РФ, таможенные посты РФ. Государственный таможенный комитет РФ подчиняется Президенту и Правительству РФ. К другим функциям этого комитета относятся контроль над соблюдением налогового и таможенного законодательства, осуществление валютного контроля и т.д.

3. Федеральная служба налоговой полиции РФ является правоохранительным органом. Эта служба призвана осуществлять оперативно-розыскную деятельность и проводить дознание. Основными задачами подразделений налоговой полиции являются:

- выявление, предупреждение и пресечение налоговых правонарушений;
- обеспечение безопасности сотрудников налоговых инспекций, проводящих проверки предприятий-налогоплательщиков;
- выявление, предупреждение и пресечение нарушений в налоговых органах, борьба с коррупцией в этих органах;
- применение санкций за налоговые правонарушения.

Налоговая полиция работает в тесном контакте с подразделениями государственной налоговой службы. Так, подразделения государственной налоговой службы по запросу налоговой полиции в течение пяти дней выделяют специалистов для проведения проверок. И, наоборот, по запросу органов государственной налоговой службы налоговая полиция должна в течение пяти дней выделить своих специалистов.

При выявлении налоговых преступлений органы государственной налоговой службы в течение трех дней направляют материалы в соответствующие органы налоговой полиции для проведения дознания.

4. Государственные внебюджетные фонды, к числу которых относятся Пенсионный фонд РФ и Фонд социального страхования РФ, контролируют правильность и своевременность уплаты единого социального налога, а также индивидуальный учет платежей в Пенсионный фонд.

5. Министерство финансов РФ и финансовые органы субъектов РФ и муниципальных образований призваны, в частности, к решению вопросов о рассрочке и об отсрочке платежей по налогам и сборам.

Государственная налоговая служба не зависит от местных органов власти. Она выполняет только те решения и постановления этих органов, которые приняты в соответствии с законом и в пределах предоставленных им прав. Местные власти не вправе отменять или изменять решения налоговых органов. Эта служба имеет собственные счета в банках и гербовую печать. Ее работа базируется на принципе единства налоговой политики как в отношении центральных, так и местных налогов.

13.3. Ответственность за налоговые правонарушения в Российской Федерации

Ответственность за налоговые правонарушения определена ст. 116—129 Налогового кодекса РФ [4]. К числу правонарушений относятся:

- нарушение срока постановки на учет в налоговом органе;
- уклонение от постановки на учет;
- нарушение срока предоставления сведений об открытии и закрытии счета в банке;
- непредоставление налоговой декларации;
- грубое нарушение правил учета доходов и расходов и объектов налогообложения;
- неуплата или неполная уплата сумм налога;
- невыполнение налоговым агентом обязанности по удержанию и (или) перечислению налогов;
- несоблюдение порядка владения, пользования и (или) распоряжения имуществом, на которое наложен арест;

- непредоставление налоговому органу сведений, необходимых для осуществления налогового контроля;
- неявка свидетеля без уважительной причины;
- отказ эксперта, переводчика или специалиста от участия в проведении налоговой проверки, дача заведомо ложного заключения или осуществление заведомо ложного перевода;
- неправомерное несообщение сведений налоговому органу;
- нарушение порядка регистрации объектов игорного бизнеса.

В качестве наказания за перечисленные правонарушения предусмотрен штраф. Величина штрафа колеблется от 50 руб. до 40 тыс. руб. и более. Например, штраф в размере 50 руб. предусмотрен за непредоставление в установленный срок налогоплательщиком в налоговые органы за каждый непредоставленный документ. Ведение же деятельности организацией или индивидуальным предпринимателем без постановки на учет в налоговом органе более 90 календарных дней влечет взыскание штрафа в размере 20% доходов, полученных в период деятельности без постановки на учет более 90 календарных дней, но не мене 40 тыс. руб.

Помимо наказаний за налоговые правонарушения в виде штрафов, в Уголовном кодексе РФ предусмотрена и уголовная ответственность (ст. 199). Уклонение от уплаты налогов организацией, совершенное в крупном размере, наказывается штрафом от 100 тыс. до 300 тыс. руб., либо арестом на срок от четырех до шести месяцев, либо лишением свободы на срок до двух лет с лишением права занимать определенные должности или заниматься определенной деятельностью на срок до трех лет. То же деяние, совершенное в особо крупном размере, наказывается штрафом от 200 тыс. до 500 тыс. руб., либо лишением свободы на срок до шести лет с лишением права занимать определенные должности или заниматься определенной деятельностью на срок до трех лет. Крупным размером признается сумма в 500 тыс. руб. за три финансовых года подряд, а особо крупным размером — 2,5 млн руб. за тот же период.

13.4. Виды налогов

Налоги делят на прямые и косвенные [2, 4, 5].

Прямые налоги — налоги с доходов физических и юридических лиц. Такие налоги уплачиваются конкретным плательщиком и вносятся непосредственно в казну. К прямым налогам относят:

- подоходные налоги с населения;
- налоги на отдельные виды доходов юридических и физических лиц, к которым относятся налоги на заработную плату и на прибыль, на процентные доходы, на земельную ренту;

- налоги на имущество;
- налог на землю.

Косвенные налоги — налоги, включенные в цену продукта. Сумма таких налогов зависит от видов деятельности и товаров (в частности, они начисляются на ресурсы). К косвенным налогам относят:

- таможенные пошлины;
- налог на добавленную стоимость;
- налог с продаж;
- акцизы — налоги, включенные в цену товаров широкого потребления (например, табака, алкоголя, бензина).

В соответствии с Налоговым кодексом РФ [4] в России предусмотрена трехуровневая шкала налогообложения. По этой шкале налоги делятся на федеральные, региональные и местные.

Статья 13 Налогового кодекса РФ гласит: к федеральным налогам относятся:

1) налог на добавленную стоимость;
2) акцизы;
3) налог на доходы физических лиц;
4) единый социальный налог;
5) налог на прибыль организации;
6) налог на добычу полезных ископаемых;
7) водный налог;
8) сборы за пользование объектами животного мира и за пользование объектами водных биологических ресурсов;
9) государственная пошлина.

В ст. 14 Налогового кодекса РФ сказано: к региональным налогам относятся:

1) налог на имущество организаций;
2) налог на игорный бизнес;
3) транспортный налог.

Наконец, ст. 15 Налогового кодекса утверждает, что к местным налогам относятся:

1) земельный налог;
2) налог на имущество физических лиц.

Налоги характеризуются налоговой ставкой и налоговой базой. Для подоходного налога для резидентов, налоговой базой которых является их доход в виде оплаты труда, ставка налога равна 13%. Сумма этого подоходного налога вычисляется по формуле

$$N_{\Phi} = \Phi \cdot g_{\Phi},$$

где N_{Φ} — сумма подоходного налога с физических лиц; Φ — фонд заработной платы; g_{Φ} — ставка подоходного налога с физических лиц, десятичная дробь.

Для единого социального налога объектом налогообложения являются выплаты, начисляемые налогоплательщиками в пользу физических лиц по трудовым и гражданско-правовым договорам, а также по авторским договорам. Налоговой базой является фонд заработной платы. Налоговым периодом является календарный год. Налоговая ставка этого налога зависит от типа налогоплательщика и от годового дохода физического лица. Как правило, ставка налога при годовом доходе до 280 тыс. руб. равна 26%. Для сельскохозяйственных товаропроизводителей, организаций народных художественных промыслов и родовых, семейных общин коренных малочисленных народов Севера при годовом доходе до 280 тыс. руб. ставка налога равна 20%. Адвокаты и нотариусы, занимающиеся частной практикой, при годовом доходе до 280 тыс. руб. уплачивают налог 8%. В Налоговом кодексе предусмотрены и другие типы налогоплательщиков. Сумма единого социального налога вычисляется по формуле

$$N_{\mathrm{E}} = \Phi \cdot g_{\mathrm{E}},$$

где N_{E} — сумма единого социального налога; Ф — фонд заработной платы; g_{E} — ставка единого социального налога, десятичная дробь.

Налогоплательщиками налога на прибыль организации признаются российские и иностранные организации, осуществляющие свою деятельность в России. Прибылью для российских организаций признаются полученные доходы, уменьшенные на величину произведенных расходов (налогооблагаемая прибыль). Таким образом, базой налога на прибыль является налогооблагаемая прибыль, а ставка этого налога для резидентов равна 24%. Налоговым периодом признается календарный год.

Налог на добавленную стоимость исчисляется из добавленной стоимости. Цена товара, реализуемого предприятием, при наличии такого налога увеличивается. Эта цена определяется как себестоимостью товара и добавленной стоимостью, так и величиной налога на добавленную стоимость. Начиная с 1 января 2008 г. налоговый период устанавливается как квартал. Налоговая ставка в этом случае определяется Налоговым кодексом и зависит от вида товара, работы или услуги. Налогообложение производится по нулевой налоговой ставке, например, для товаров, помещенных под таможенный режим свободной таможенной зоны, или для работ (услуг), выполняемых в космическом пространстве, и т.д. Налогообложение производится по налоговой ставке 10%, в частности, при реализации скота и птицы в живом весе, мяса и мясопродуктов за некоторым исключением, молока и молокопродуктов, некоторых товаров для детей и т.д. В остальных случаях налогообложение производится по ставке 18%. Сумма налога на добавленную стоимость вычисляется по формуле

$$N_Д = \frac{Д \cdot g_Д}{1 + g_Д},$$

где $N_Д$ — сумма налога на добавленную стоимость; Д — добавленная стоимость с налогом на нее; $g_Д$ — ставка налога на добавленную стоимость, десятичная дробь.

▷ **Пример 13.1.** Товар был куплен за 120 000 руб., и при выполнении работы, в которой этот товар был использован как комплектующее изделие, предприятие получило 131 800 руб. Определить сумму налога на добавленную стоимость при ставке налога 18%.

Р е ш е н и е. Сумма налога на добавленную стоимость равна:

$$N_Д = \frac{Д \cdot g_Д}{1 + g_Д} = \frac{(131\,800 - 120\,000) \cdot 0{,}18}{1{,}18} = 1800 \text{ руб.}$$ ◀

Акцизы — это налоги, включенные в цену товаров широкого потребления. В соответствии с Налоговым кодексом РФ подакцизными товарами признаются спирт этиловый, спиртосодержащая продукция, алкогольная продукция, пиво, табачная продукция, автомобили легковые и мотоциклы с мощностью двигателей свыше 90 л.с., автомобильный бензин, двигательное топливо, моторные масла, прямогонный бензин. Начиная с 1 января 2008 г. акцизный налог будет изменяться год от года. Так, акцизный налог на этиловый спирт с 1 января 2008 г. до конца этого года составит 25 руб. 15 коп. за литр, с 1 января 2009 г. до конца года — 26 руб. 80 коп. за литр, с 1 января 2010 г. до конца этого года — 28 руб. 40 коп. за литр. Акцизный налог на автомобили легковые с мощностью двигателя свыше 90 л.с. и до 150 л.с. включительно с 1 января 2008 г. до конца этого года составит 19 руб. 26 коп. за 1 л.с., с 1 января 2009 г. до конца года — 21 руб. за 1 л.с., с 1 января 2010 г. до конца этого года — 22 руб. за 1 л.с. и т.д.

13.5. Суммарная выплата по основным налогам

Суммарная выплата по основным налогам зависит от базы начислений и налоговых ставок. Под основными налогами будем понимать налоги, которые определяют основную сумму налоговых выплат. В качестве основных налогов принимаем подоходный налог с физических лиц, единый социальный налог, налог на прибыль, налог на добавленную стоимость. Если добавленная стоимость с налогом на нее равна Д руб., то после выплаты налога по ставке $g_Д$ оставшуюся сумму A, являющуюся добавленной стоимостью, можно рассчитать по формуле

$$A = \frac{\text{Д}}{1 + g_{\text{Д}}}.$$

Чистую прибыль предприятия обозначим буквой П. Тогда прибыль до налогообложения B будет равна:

$$B = \frac{\text{П}}{1 - g_{\text{П}}},$$

где $g_{\text{П}}$ — ставка налога на прибыль, десятичная дробь.

Разность $A - B$ является доходом предприятия, из которого выплачивается заработная плата его сотрудникам. Величину фонда заработной платы Φ находят после выплаты единого социального налога. Запишем эту разность в виде:

$$A - B = \frac{\text{Д}}{1 + g_{\text{Д}}} - \frac{\text{П}}{1 - g_{\text{П}}}.$$

Сумма фонда заработной платы Φ и единого социального налога должна быть равна указанной разности, т.е.

$$\Phi + \Phi \cdot g_{\text{Е}} = A - B.$$

Отсюда определяем фонд заработной платы:

$$\Phi = \frac{A - B}{1 + g_{\text{Е}}} = \frac{\text{Д}}{\left(1 + g_{\text{Д}}\right) \cdot \left(1 + g_{\text{Е}}\right)} - \frac{\text{П}}{\left(1 - g_{\text{П}}\right) \cdot \left(1 + g_{\text{Е}}\right)}. \qquad \textbf{(13.1)}$$

Отношение фонда заработной платы к добавленной стоимости определяется соотношением

$$\frac{\Phi}{\text{Д}} = \frac{1}{\left(1 + g_{\text{Д}}\right) \cdot \left(1 + g_{\text{Е}}\right)} - \frac{\text{П}/\text{Д}}{\left(1 - g_{\text{П}}\right) \cdot \left(1 + g_{\text{Е}}\right)}.$$

После выплаты подоходного налога сотрудники предприятия получат чистую заработную плату в объеме:

$$\text{З} = \Phi\left(1 - g_{\Phi}\right) = \frac{\text{Д} \cdot \left(1 - g_{\Phi}\right)}{\left(1 + g_{\text{Д}}\right) \cdot \left(1 + g_{\text{Е}}\right)} - \frac{\text{П} \cdot \left(1 - g_{\Phi}\right)}{\left(1 - g_{\text{П}}\right) \cdot \left(1 + g_{\text{Е}}\right)}.$$

Для определения суммарной выплаты по основным налогам N надо из добавленной стоимости с налогом на нее Д вычесть чистую заработную плату и чистую прибыль. Таким образом,

$$N = \text{Д} - \text{З} - \Pi = \text{Д} - \frac{\text{Д}\cdot(1-g_{\Phi})}{(1+g_{\text{Д}})\cdot(1+g_{\text{E}})} + \frac{\Pi\cdot(1-g_{\Phi})}{(1-g_{\Pi})\cdot(1+g_{\text{E}})} - \Pi.$$

Отношение суммарной выплаты по основным налогам к добавленной стоимости (эффективная налоговая ставка) определяется соотношением

$$g = \frac{N}{\text{Д}} = 1 - \frac{(1-g_{\Phi})}{(1+g_{\text{Д}})\cdot(1+g_{\text{E}})} + \frac{\Pi}{\text{Д}}\left(\frac{(1-g_{\Phi})}{(1-g_{\Pi})\cdot(1+g_{\text{E}})} - 1\right). \qquad \textbf{(13.2)}$$

Возможны два предельных случая: чистая прибыль равна нулю и фонд заработной платы равен нулю.

Если чистая прибыль равна нулю, то, как следует из соотношения **(13.2)**, отношение суммарной выплаты по основным налогам к добавленной стоимости с налогом на нее при отсутствии чистой прибыли будет определяться соотношением

$$g = \frac{N}{\text{Д}} = 1 - \frac{(1-g_{\Phi})}{(1+g_{\text{Д}})\cdot(1+g_{\text{E}})}. \qquad \textbf{(13.3)}$$

Если фонд заработной платы равен нулю, то вся сумма, оставшаяся после выплаты налога на добавленную стоимость с налогом на нее и после выплат налога на прибыль, становится чистой прибылью. Значение чистой прибыли в этом случае будет равно:

$$\Pi = \frac{\text{Д}\cdot(1-g_{\Pi})}{1+g_{\text{Д}}}. \qquad \textbf{(13.4)}$$

Отношение суммарной выплаты по основным налогам к добавленной стоимости с налогом на нее (эффективная налоговая ставка) в этом случае рассчитывается по формуле

$$\frac{N}{\text{Д}} = 1 - \frac{(1-g_{\Phi})}{(1+g_{\text{Д}})\cdot(1+g_{\text{E}})} + \frac{1-g_{\Pi}}{1+g_{\text{Д}}}\cdot\left(\frac{(1-g_{\Phi})}{(1-g_{\Pi})\cdot(1+g_{\text{E}})} - 1\right) = 1 - \frac{1-g_{\Pi}}{1+g_{\text{Д}}} = \frac{g_{\text{Д}}+g_{\Pi}}{1+g_{\text{Д}}}. \qquad \textbf{(13.5)}$$

▷ **Пример 13.2.** Найти часть добавленной стоимости с налогом на нее, выплачиваемой в виде налогов при величине чистой прибыли, составляющей 10% (0%) от добавленной стоимости с налогом на нее, а также при равенстве нулю фонда заработной платы, при следующих налоговых ставках: налог на добавленную стоимость — 18%, единый социальный налог — 26%, подоходный налог — 13%, налог на прибыль — 24%. Определить также максимально возможное отношение чистой прибыли к добавленной стоимости с налогом на нее.

Р е ш е н и е. Отношение суммарной выплаты по основным налогам к добавленной стоимости с налогом на нее запишем в виде:

$$\frac{N}{Д}=1-\frac{(1-0{,}13)}{(1+0{,}18)\cdot(1+0{,}26)}+\frac{П}{Д}\left(\frac{(1-0{,}13)}{(1-0{,}24)\cdot(1+0{,}26)}-1\right)=$$
$$=0{,}415-0{,}0915\cdot\frac{П}{Д}.$$

Отсюда следует, что при величине чистой прибыли, составляющей 10% от добавленной стоимости с налогом на нее, часть добавленной стоимости с налогом от нее, выплачиваемой в виде налогов, равна $\frac{N}{Д}=0{,}415-0{,}0915\cdot 0{,}1=0{,}406$, или 40,6%. При отсутствии чистой прибыли часть добавленной стоимости с налогом от нее, выплачиваемой в виде налогов, равна $\frac{N}{Д}=0{,}415$, или 41,5%. При равенстве нулю фонда заработной платы

$$\frac{N}{Д}=\frac{g_Д+g_П}{1+g_Д}=\frac{0{,}18+0{,}24}{1+0{,}18}=0{,}356,\ \text{или } 35{,}6\%.$$

Максимально возможное отношение чистой прибыли к добавленной стоимости с налогом от нее равно:

$$\frac{П}{Д}=1-0{,}356=0{,}644,\ \text{или } 64{,}4\%.$$ ◀

13.6. Прогрессивный подоходный налог с физических лиц

Пусть ставка подоходного налога с физических лиц является функцией от величины заработной платы, т.е. в конечном счете от фонда заработной платы. Закон изменения ставки подоходного налога с физических лиц от величины заработной платы вырабатывают законодательные органы. Наиболее целесообразной для данного случая представляется экспоненциальная зависимость налоговой ставки от величины заработной платы Z. При низких заработных платах налог не взимается. Таким образом, зависимость налоговой ставки от величины заработной платы может быть задана следующими соотношениями

$$\left.\begin{array}{ll} g_Z = \eta - e^{\beta\cdot\varsigma}\cdot e^{-\beta\cdot Z} & \text{при} \quad Z > -\dfrac{\ln\eta}{\beta} + \varsigma, \\ g_Z = 0 & \text{при} \quad Z < -\dfrac{\ln\eta}{\beta} + \varsigma. \end{array}\right\} \qquad \textbf{(13.6)}$$

В качестве примера ставки подоходного налога с физических лиц от величины заработной платы примем функцию

$$g_Z = 0,7 - e^{-2\cdot 10^{-5}\cdot Z} \ \text{ при } \ Z > -\frac{\ln 0,7}{0,00002} = 17833,75 \ \text{ руб.},$$

$$g_Z = 0 \ \text{ при } \ Z < 17833,75 \ \text{ руб.}$$

График ставки налога в зависимости от величины заработной платы физического лица для такой налоговой ставки представлен на рис. 13.1.

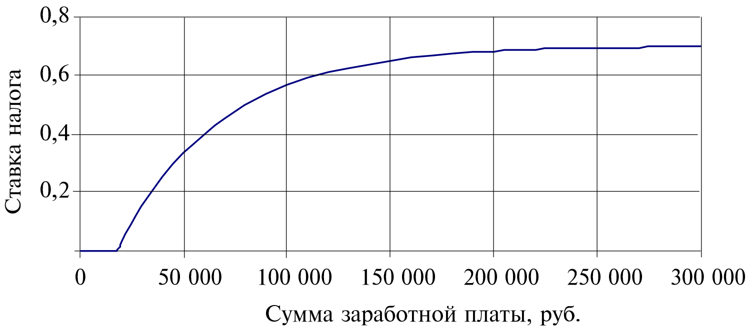


Рис. 13.1. **Ставка подоходного налога с физических лиц**

Пусть на предприятии работает K сотрудников, каждому из которых начисляется заработная плата Z_k, где $k = 1, 2, ..., K$ — номер сотрудника. Чистая заработная плата каждого их этих сотрудников равна:

$$З_k = Z_k \text{ при } Z_k < -\frac{\ln \eta}{\beta} + \varsigma ,$$

$$З_k = Z_k \left(1 - g_Z\right) = Z_k \left(1 - \eta - e^{\beta \cdot \varsigma} \cdot e^{-\beta \cdot Z_k}\right) \text{ при } Z_k > -\frac{\ln \eta}{\beta} + \varsigma .$$

Для рассматриваемого примера формулу для чистой заработной платы каждого из сотрудников можно записать в виде:

$$З_k = Z_k \text{ при } Z_k > 17833{,}75 ,$$

$$З_k = Z_k \left(0{,}3 - e^{-2 \cdot 10^{-5} \cdot Z_k}\right) \text{ при } Z_k > 17833{,}75 .$$

График зависимости чистой заработной платы сотрудника под номером k в зависимости от начисленной на него заработной платы Z_k представлен на рис. 13.2.

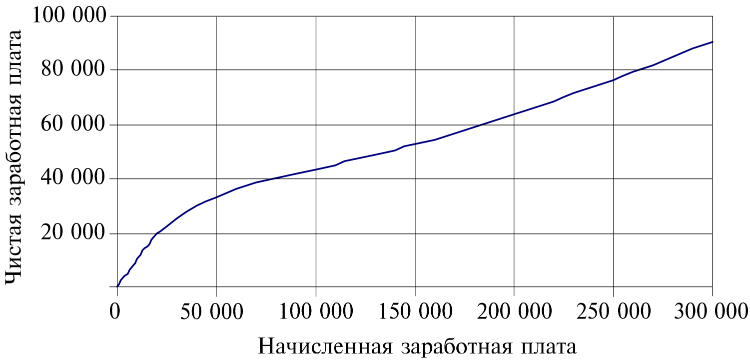


Рис. 13.2. **Чистая заработная плата**

Фондом заработной платы предприятия является сумма всех начисленных на сотрудников заработных плат, т.е.

$$\Phi = \sum_{k=1}^{K} Z_k. \tag{13.7}$$

Суммарная чистая заработная плата равна:

$$\left.\begin{aligned} З &= \sum_{k=1}^{K_0} Z_k && \text{при} \quad Z_{K_0} < -\frac{\ln \eta}{\beta} + \varsigma, \\ З &= \sum_{k=K_0+1}^{K} Z_k \left(1 - \eta - e^{\beta \cdot \varsigma} \cdot e^{-\beta \cdot Z_k}\right) && \text{при} \quad Z_{K_0+1} > -\frac{\ln \eta}{\beta} + \varsigma. \end{aligned}\right\} \tag{13.8}$$

Здесь K_0 является номером сотрудника, получающего максимальную заработную плату, из числа тех, с кого не взимается подоходный налог; K_0+1 — номер сотрудника, получающего минимальную заработную плату, из числа тех, с кого взимается подоходный налог.

Суммарный подоходный налог в этом случае на всех сотрудников вычисляется по формуле

$$N_\Phi = \sum_{k=K_0+1}^{K} Z_k - \sum_{k=K_0+1}^{K} Z_k \left(1-\eta - e^{\beta\cdot\varsigma}\cdot e^{-\beta\cdot Z_k}\right) = \\ = \sum_{k=K_0+1}^{K} Z_k \left(\eta + e^{\beta\cdot\varsigma}\cdot e^{-\beta\cdot Z_k}\right). \quad \mathbf{(13.9)}$$

Эффективную ставку подоходного налога с физических лиц на фонд заработной платы находят в виде отношения

$$g_\Phi = \frac{N_\Phi}{\Phi} = \sum_{k=K_0+1}^{K} \frac{Z_k}{\Phi}\left(\eta + e^{\beta\cdot\varsigma}\cdot e^{-\beta\cdot Z_k}\right). \quad \mathbf{(13.10)}$$

Из сказанного следует, что после выплаты подоходного налога сотрудники предприятия получат чистую заработную плату в объеме:

$$З = \Phi - N_\Phi = \Phi\left(1-\frac{N_\Phi}{\Phi}\right) = \Phi\left(1-g_\Phi\right).$$

Суммарная выплата по основным налогам определяется выражением

$$N = Д - \Phi + N_\Phi - П = Д - \frac{Д}{\left(1+g_Д\right)\cdot\left(1+g_Е\right)} + \\ + \frac{П}{\left(1-g_П\right)\cdot\left(1+g_Е\right)} + N_\Phi - П. \quad \mathbf{(13.11)}$$

Для проведения более подробного анализа функции суммарных налогов от чистой прибыли необходимо определить зависимость заработной платы каждого сотрудника от величины этой прибыли. В качестве примера рассмотрим случай, когда заработная плата изменяется по закону арифметической прогрессии, а именно:

$$Z_k = z + (k-1)\cdot a\cdot z = z\cdot\left(1+(k-1)\cdot a\right). \quad \mathbf{(13.12)}$$

Коэффициент a является темпом прироста заработной платы от сотрудника к сотруднику, z — минимальная заработная плата. Тогда фонд заработной платы будет равен:

$$\Phi = \sum_{k=1}^{K} Z_k = z\sum_{k=1}^{K}\left(1+\left(k-1\right)\cdot a\right) = \frac{K\cdot z}{2}\left(2+\left(K-1\right)\cdot a\right) = = K\cdot z\cdot\left(1+\frac{K-1}{2}\cdot a\right). \quad \textbf{(13.13)}$$

Отсюда можно найти зависимость минимальной заработной платы z от фонда заработной платы:

$$z = \frac{2\Phi}{K\left(2+\left(K-1\right)\cdot a\right)}. \quad \textbf{(13.14)}$$

▷ **Пример 13.3.** Месячная добавленная стоимость предприятия, на котором работает 10 человек, равна 600 000 руб. Темп прироста заработной платы от сотрудника к сотруднику равен 20%.

Определить месячную заработную плату, начисляемую каждому сотруднику при условии, что чистая прибыль предприятия равна нулю. Найти также величину налога, учитываемую с каждого сотрудника, при ставке налога, определяемой формулой $g_Z = 0,7 - e^{-2\cdot10^{-5}\cdot Z}$.

Р е ш е н и е. Фонд заработной платы равен:

$$\Phi = 0,6726\cdot Д = 600\,000\cdot 0,6726 = 403\,560 \text{ руб.}$$

Минимальная заработная плата составит:

$$z = \frac{2\cdot 403\,560}{10\left(2+\left(10-1\right)\cdot 0,2\right)} = 21\,240 \text{ руб.}$$

Величина начисленной заработной платы сотрудника под номером k вычисляется по формуле

$$Z_k = 21\,240\cdot\left(1+0,2\cdot\left(k-1\right)\right),$$

где k изменяется от единицы до десяти.

Результаты расчета представлены на рис. 13.3.

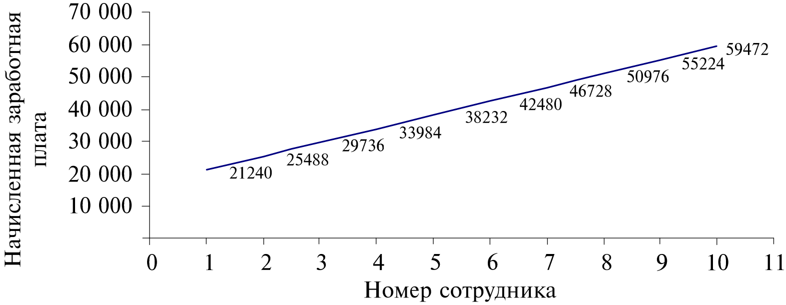


Рис. 13.3. **Модель заработной платы**

Величина налога, начисленного на каждого сотрудника, определяется по формуле

$$N_k = 21\,240 \cdot \left(1 + 0,2 \cdot (k-1)\right)\left(0,7 - e^{-0,4248 \cdot \left(1+0,2\cdot(k-1)\right)}\right).$$

Результаты расчета по этой формуле представлены на рис. 13.4.

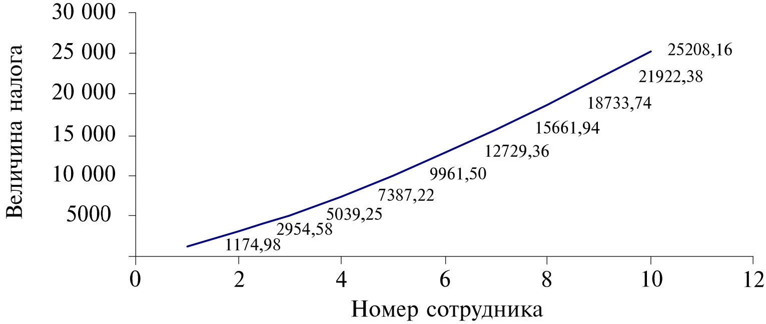


Рис. 13.4. **Модель подоходного налога с физических лиц** ◄

Формулу для суммарного подоходного налога с учетом закона изменения начисленной заработной платы в виде арифметической прогрессии **(13.12)** можно записать в виде:

$$N_\Phi = \sum_{k=K_0+1}^{K} z \cdot \left(1 + (k-1) \cdot a\right)\left(\eta + e^{\beta\cdot\varsigma} \cdot e^{-\beta\cdot z\cdot\left(1+(k-1)\cdot a\right)}\right) = \left(K - K_0\right) \cdot \eta \cdot z +$$
$$+ a \cdot \eta \cdot z \cdot \sum_{k=K_0+1}^{K} (k-1) + e^{\beta\cdot\varsigma} \cdot z \cdot e^{-\beta\cdot z} \cdot (1-a) \sum_{k=K_0+1}^{K} e^{-\beta\cdot z\cdot(k-1)\cdot a} +$$
$$+ e^{\beta\cdot\varsigma} \cdot a \cdot z \cdot e^{-\beta\cdot z(1-a)} \cdot \sum_{k=K_0+1}^{K} k \cdot e^{-\beta\cdot z\cdot k\cdot a}.$$

Первая сумма, входящая в это соотношение, является суммой натурального числа:

$$\sum_{k=K_0+1}^{K}(k-1)=\frac{K(K-1)}{2}-\frac{K_0(K_0-1)}{2}.$$

Вторая сумма, входящая в это соотношение, является суммой геометрической прогрессии со знаменателем $e^{-\beta\cdot z\cdot a}$:

$$\sum_{k=K_0+1}^{K}e^{-\beta\cdot z\cdot a\cdot(k-1)}=\sum_{k=1}^{K}e^{-\beta\cdot z\cdot a\cdot(k-1)}-\sum_{k=1}^{K_0}e^{-\beta\cdot z\cdot a\cdot(k-1)}=$$
$$=\frac{e^{-\beta\cdot z\cdot a\cdot K}-1}{e^{-\beta\cdot z\cdot a}-1}-\frac{e^{-\beta\cdot z\cdot a\cdot K_0}-1}{e^{-\beta\cdot z\cdot a}-1}=\frac{e^{-\beta\cdot z\cdot a\cdot K}-e^{-\beta\cdot z\cdot a\cdot K_0}}{e^{-\beta\cdot z\cdot a}-1}.$$

Третья сумма является арифметико-геометрической прогрессией:

$$\sum_{k=K_0+1}^{K}k\cdot e^{-\beta\cdot z\cdot k\cdot a}=\frac{(K_0-1)\cdot e^{-\beta\cdot z\cdot a\cdot K_0}-(K-1)\cdot e^{-\beta\cdot z\cdot a\cdot K}}{1-e^{-\beta\cdot z\cdot a}}+$$
$$+\frac{e^{-\beta\cdot z\cdot a\cdot K_0}-e^{-\beta\cdot z\cdot a\cdot K}}{\left(1-e^{-\beta\cdot z\cdot a}\right)^2}-K_0\cdot e^{-\beta\cdot z\cdot K_0\cdot a}+K\cdot e^{-\beta\cdot z\cdot K\cdot a}.$$

Теперь формулу для суммы подоходного налога с физических лиц можно представить в виде:

$$N_{\Phi}=(K-K_0)\cdot\eta\cdot z+a\cdot\eta\cdot z\cdot\frac{(K-1)\cdot K-(K_0-1)\cdot K_0}{2}-$$
$$-e^{\beta\cdot\varsigma}\cdot z\cdot e^{-\beta\cdot z}\cdot(1-a)\cdot\frac{e^{-\beta\cdot z\cdot a\cdot K_0}-e^{-\beta\cdot z\cdot a\cdot K}}{1-e^{-\beta\cdot z\cdot a}}+e^{\beta\cdot\varsigma}\cdot a\cdot z\cdot e^{-\beta\cdot z(1-a)}\times$$
$$\times\left(\frac{(K_0-1)\cdot e^{-\beta\cdot z\cdot a\cdot K_0}-(K-1)\cdot e^{-\beta\cdot z\cdot a\cdot K}}{1-e^{-\beta\cdot z\cdot a}}+\right.$$
$$\left.+\frac{e^{-\beta\cdot z\cdot a\cdot K_0}-e^{-\beta\cdot z\cdot a\cdot K}}{\left(1-e^{-\beta\cdot z\cdot a}\right)^2}-K_0\cdot e^{-\beta\cdot z\cdot K_0\cdot a}+K\cdot e^{-\beta\cdot z\cdot K\cdot a}\right),$$

где $z=\dfrac{2\Phi}{K\left(2+(K-1)\cdot a\right)}$, $\Phi=\dfrac{Д}{(1+g_Д)\cdot(1+g_Е)}-\dfrac{П}{(1-g_П)\cdot(1+g_Е)}$.

Отношение суммы подоходного налога с физических лиц к добавленной стоимости с налогом на нее выглядит следующим образом:

$$\frac{N_\Phi}{Д} = \left(K-K_0\right)\cdot\eta\cdot\frac{z}{Д} + a\cdot\eta\cdot\frac{z}{Д}\cdot\frac{\left(K-1\right)\cdot K-\left(K_0-1\right)\cdot K_0}{2} +$$

$$+ e^{\beta\cdot\varsigma}\cdot\frac{z}{Д}\cdot e^{-\beta\cdot Д\cdot\frac{z}{Д}}\cdot\left(1-a\right)\cdot\frac{e^{-\beta\cdot Д\cdot\frac{z}{Д}\cdot a\cdot K_0} - e^{-\beta\cdot Д\cdot\frac{z}{Д}\cdot a\cdot K}}{1-e^{-\beta\cdot Д\cdot\frac{z}{Д}\cdot a}} + e^{\beta\cdot\varsigma}\cdot a\cdot\frac{z}{Д}\cdot e^{-\beta\cdot Д\cdot\frac{z}{Д}\cdot\left(1-a\right)}\times$$

$$\times\left(\frac{\left(K_0-1\right)\cdot e^{-\beta\cdot Д\cdot\frac{z}{Д}\cdot a\cdot K_0} - \left(K-1\right)\cdot e^{-\beta\cdot Д\cdot\frac{z}{Д}\cdot a\cdot K}}{1-e^{-\beta\cdot Д\cdot\frac{z}{Д}\cdot a}} + \right. \qquad \mathbf{(13.15)}$$

$$\left. + \frac{e^{-\beta\cdot Д\cdot\frac{z}{Д}\cdot a\cdot K_0} - e^{-\beta\cdot Д\cdot\frac{z}{Д}\cdot a\cdot K}}{\left(1-e^{-\beta\cdot Д\cdot\frac{z}{Д}\cdot a}\right)^2} - K_0\cdot e^{-\beta\cdot Д\cdot\frac{z}{Д}\cdot K_0\cdot a} + K\cdot e^{-\beta\cdot Д\cdot\frac{z}{Д}\cdot K\cdot a}\right),$$

где $\frac{z}{Д} = \frac{2}{K\left(2+\left(K-1\right)\cdot a\right)}\cdot\frac{\Phi}{Д}$, $\frac{\Phi}{Д} = \frac{1}{\left(1+g_Д\right)\cdot\left(1+g_Е\right)} - \frac{1}{\left(1-g_П\right)\cdot\left(1+g_Е\right)}\cdot\frac{П}{Д}$.

Эффективная налоговая ставка (отношение суммарной выплаты по основным налогам к добавленной стоимости с налогом на нее) определяется выражением

$$g = \frac{N}{Д} = 1 - \frac{1}{\left(1+g_Д\right)\cdot\left(1+g_Е\right)} + \frac{1}{\left(1-g_П\right)\cdot\left(1+g_Е\right)}\cdot\frac{П}{Д} + \frac{N_\Phi}{Д} - \frac{П}{Д}. \qquad \mathbf{(13.16)}$$

▷ **Пример 13.4.** Построить график отношения суммы подоходного налога с физических лиц к добавленной стоимости с налогом на нее и график эффективной налоговой ставки (отношения суммарной выплаты по основным налогам к добавленной стоимости с налогом на нее) от отношения чистой прибыли к добавленной стоимости с налогом на нее. Месячная добавленная стоимость предприятия, на котором работает 10 человек, равна 600 000 руб. Темп прироста заработной платы от сотрудника к сотруднику равен 20%. Подоходный налог с физических лиц определяется соотношениями

$$g_Z = 0{,}7 - e^{-2\cdot 10^{-5}\cdot Z} \quad \text{при } Z > 17\,833{,}75 \text{ руб.},$$

$$g_Z = 0 \quad \text{при } Z < 17\,833{,}75 \text{ руб.}$$

Ставки по остальным основным налогам: налог на добавленную стоимость — 18%, единый социальный налог — 26%, налог на прибыль — 24%.

Р е ш е н и е. Указанные графики можно построить в Excel, подставив в формулы **(13.15)** и **(13.16)** условия примера. График отношения суммы подоходного налога с физических лиц к добавленной стоимости с налогом на нее от отношения чистой прибыли к добавленной стоимости с налогом на нее представлен на рис. 13.5.

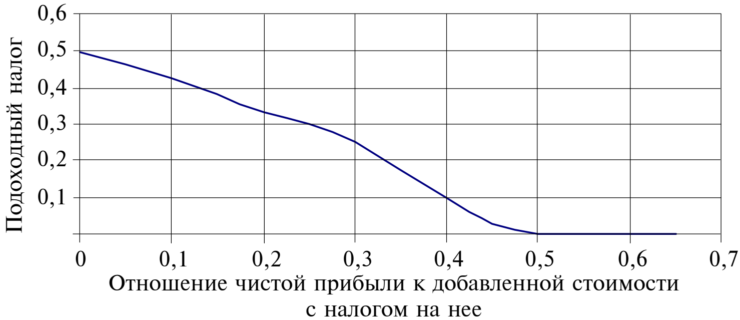


Рис. 13.5. **Подоходный налог с физических лиц**

Из этого графика следует, что подоходный налог с физических лиц при заданной модели налогообложения с физических лиц и заданной заработной плате сотрудников при отсутствии чистой прибыли будет равен 50% добавленной стоимости с налогом на нее. При равенстве чистой прибыли половине добавленной стоимости с налогом на нее и при ее увеличении налог с физических лиц равен нулю.

График отношения суммарной выплаты по основным налогам к добавленной стоимости с налогом на нее от отношения чистой прибыли к добавленной стоимости с налогом на нее представлен на рис. 13.6.

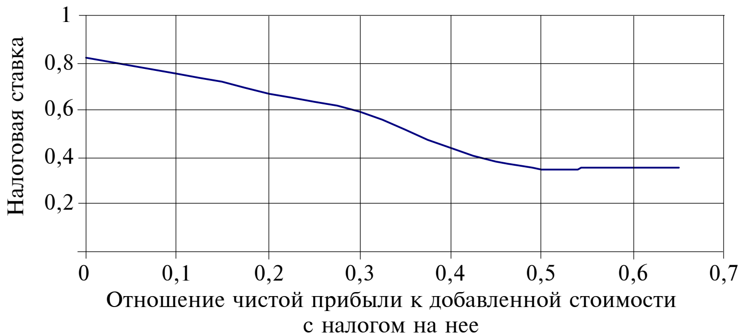


Рис. 13.6. **Отношение суммарного налога к добавленной стоимости с налогом на нее**

На рис. 13.7 представлена часть этого графика на интервале 0,4—0,7 отношения чистой прибыли к добавленной стоимости с налогом на нее.

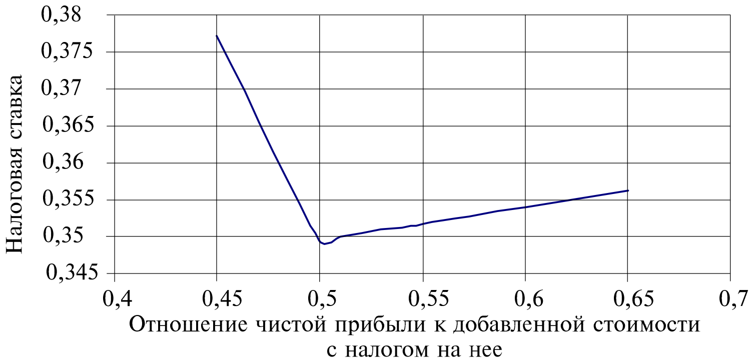


Рис. 13.7. **Минимальное значение общего налога**

Из рис. 13.6 и 13.7 видно, что исследуемая зависимость имеет минимум. При равенстве чистой прибыли половине добавленной стоимости с налогом на нее суммарная выплата по основным налогам составит 35% добавленной стоимости с налогом на нее. ◀

Таким образом, суммарная выплата по основным налогам существенным образом будет зависеть от заработной платы сотрудников.

13.7. Оптимизация налоговой ставки. Кривая Лаффера

Легко представить себе, что постепенное увеличение эффективной налоговой ставки, начиная с нуля, при прочих неизменных условиях приведет вначале к увеличению налоговых поступлений в бюджет. Это будет происходить до некоторой эффективной ставки, которую обозначим $g_{\max}$. Дальнейшее увеличение ставки будет снижать поступления в бюджет, так как часть предприятий из-за непосильного налогового бремени будет закрыта, а другая часть «уйдет в тень», т.е. перестанет платить налоги в полном размере. Это будет продолжаться до тех пор, пока эффективная ставка не станет равной 100%, т.е. налог становится равным всей добавленной стоимости. В этом случае налоги платить уже никто не сможет и налоговые поступления будут равны нулю. График описанной зависимости величины суммарного налога от эффективной налоговой ставки представлен на рис. 13.8.

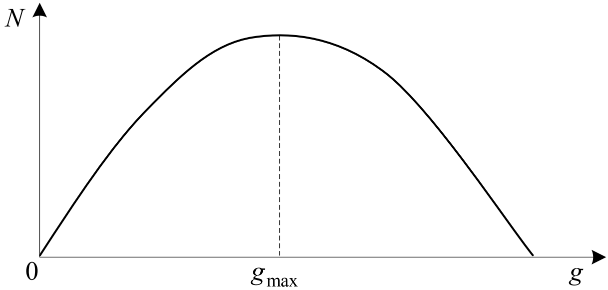


Рис. 13.8. **Кривая Лаффера**

Идея оптимизации налоговой ставки принадлежит А.Б. Лафферу. Поэтому кривая, приведенная на рис. 13.8, носит его имя. Предложенные Лаффером подходы увеличения налоговых поступлений были использованы администрацией президента США Р. Рейгана в 1980-е гг. В результате выяснилось, что практическое использование кривой Лаффера не всегда приводит к желаемым результатам. Связано это с тем, что, по-видимому, кривые Лаффера, с одной стороны, будут отличаться в разных странах друг от друга, а, с другой стороны, реальную зависимость налоговых поступлений от налоговой ставки определить довольно трудно. Надежные методы построения кривой Лаффера сегодня отсутствуют.

13.8. Модель государственного бюджета

Государственный бюджет — это централизованный денежный фонд государства и его органов, предназначенный для обеспечения функций и задач государства. Государственный бюджет является законом. В России государственный бюджет утверждается Государственной Думой.

Консолидированный государственный бюджет представляет собой свод бюджетов различного территориального уровня. Например, районные бюджеты города и городской бюджет представляют консолидированный государственный бюджет города.

Бюджетная система Российской Федерации — это совокупность бюджетов всех уровней и государственных внебюджетных фондов. Эта система включает в себя три уровня:

1) федеральный бюджет и бюджеты государственных внебюджетных фондов;

2) бюджеты субъектов РФ и бюджеты территориальных государственных внебюджетных фондов;

3) местные бюджеты.

Бюджетная классификация — это группировка доходов и расходов бюджетов всех уровней, а также источников покрытия дефицита этих бюджетов с присвоением объектам классификации группировочных кодов. В соответствии с бюджетной классификацией госбюджет состоит из четырех блоков:

1) доходы;
2) расходы;
3) финансирование бюджета;
4) государственный долг.

13.9. Доходы и расходы государственного бюджета

Доходы бюджета — денежные средства, поступающие в безвозмездном и безвозвратном порядке в соответствии с законодательством Российской Федерации в распоряжение органов государственной власти РФ, субъектов РФ и местного самоуправления. Доходы делятся на группы, подгруппы, статьи и подстатьи (четыре уровня).

В России используется четыре группы доходов:

1) налоговые;
2) неналоговые;
3) безвозмездные поступления;
4) доходы целевых внебюджетных фондов.

Налоговые доходы подробно рассмотрены в первых параграфах этой главы.

Группа *неналоговых* доходов включает в себя ряд подгрупп. К этим подгруппам относятся, например, доходы от имущества, находящегося в государственной и муниципальной собственности, доходы от продажи земли и нематериальных активов, доходы от внешнеэкономической деятельности и т.д.

К *безвозмездным* поступлениям относят перечисления от нерезидентов, бюджетов других уровней, государственных внебюджетных фондов, государственных организаций и др.

Целевые внебюджетные фонды делятся на социальные и экономические. К *социальным* фондам относится Пенсионный фонд РФ, Государственный фонд занятости населения РФ, Федеральный и территориальные фонды обязательного медицинского страхования, Фонд социального страхования РФ. *Экономическими* фондами являются Фонд развития таможенной системы РФ, дорожные фонды и т.д.

В свою очередь, подгруппы делятся на статьи и подстатьи. Например, подгруппа «налог на прибыль (доход), прирост капитала» делится на две статьи: налог на прибыль (доход) предприятий и организаций и подоходный налог с физических лиц. Статья «подоходный налог с физических лиц» делится на три подстатьи: подоходный налог, удерживаемый предприятиями, учреждениями и организациями, подоходный налог, удерживаемый налоговыми органами, и налог на игорный бизнес.

Расходы государственного бюджета — денежные средства, направляемые на финансовое обеспечение задач и функций государственного и местного самоуправления. *Классификация* расходов государственного бюджета — это группировка расходов бюджетов всех уровней, отражающая направление бюджетных средств на выполнение основных функций государства. Группировка имеет четырехуровневую структуру: разделы и подразделы, целевые статьи и виды расходов. К разделам относятся общегосударственные вопросы, национальная оборона, национальная безопасность и правоохранительная деятельность, национальная экономика, жилищно-коммунальное хозяйство, охрана окружающей среды, образование, культура, кинематография и средства массовой информации, здравоохранение и спорт, социальная политика, межбюджетные трансферты и т.д.

Бюджетные ассигнования расходов федерального бюджета, утвержденные Федеральным законом «О федеральном бюджете на 2006 год», были равны 4445 млрд руб. Исполнено было 4281 млрд руб. Таким образом, реальное исполнение составило 96,31% плана. Исполнение по основным разделам и подразделам было следующим:

- общегосударственные вопросы — 530 млрд руб., т.е. 12,38% исполненного бюджета;
- функционирование Президента РФ — 6,9 млрд руб., т.е. 0,16%;
- национальная оборона — 682 млрд руб., т.е. 15,93%;
- национальная безопасность и правоохранительная деятельность — 550 млрд руб., т.е. 12,85%;
- национальная экономика — 345 млрд руб., т.е. 8,06%;
- жилищно-коммунальное хозяйство — 53 млрд руб., т.е. 1,24%;
- образование — 212 млрд руб., т.е. 4,95%;
- пенсионное обеспечение — 141 млрд руб., т.е. 3,29%, и т.д.

Согласно перспективному финансовому плану, утвержденному Правительством РФ, доходы федерального бюджета в 2008 г. составят 7112 млрд руб., в 2009 г. — 7797 млрд руб. Общие расходы в 2008 г. составят 6093 млрд руб., в 2009 г. — 6716 млрд руб.

Объем стабилизационного фонда на начало 2008 г. — 4194 млрд руб., на начало 2009 г. — 5463 млрд руб.

13.10. Бюджетный дефицит

Расходы и доходы государственного бюджета могут различаться. Если расходы превышают доходы, то имеет место бюджетный *дефицит*. В противном случае имеет место бюджетный *профицит*. При равенстве расходов и доходов говорят о *балансе* федерального бюджета.

Источники финансирования дефицитов бюджета делятся на внутренние и внешние.

Внутренние источники финансирования:

- кредит Центрального банка и изменение остатков средств бюджета;
- государственные ценные бумаги;
- бюджетные ссуды, полученные от государственных внебюджетных фондов;
- бюджетные ссуды, полученные от бюджетов других уровней;
- поступления от продажи имущества, находящегося в государственной и муниципальной собственности;
- государственные запасы драгоценных металлов и драгоценных камней.

Внешние источники финансирования:

- кредиты международных финансовых организаций;
- кредиты правительств иностранных государств;
- кредиты иностранных коммерческих банков и фирм;
- изменение остатков средств бюджета на счетах в банках в иностранной валюте.

Таким образом, при наличии бюджетного дефицита во многом государство вынуждено покрывать его долгом. Государственные долги России и субъектов РФ делятся на внутренние и внешние.

По данным Центрального банка РФ внешний долг на 1 июля 2007 г. составил 384,8 млрд долл. По секторам этот долг распределился следующим образом:

1) органы государственного управления — 40,8 млрд долл., включая новый российский долг — 30,8 млрд долл., долг СССР — 8,5 млрд долл. и долг субъектов РФ — 1,5 млрд долл.;

2) органы денежно-кредитного регулирования — 1 млрд долл.;

3) банки — 131 млрд долл.;

4) прочие секторы, куда, в частности, входят долговые обязательства перед прямыми инвесторами, долговые ценные бумаги, задолженность по финансовому лизингу, — 212 млрд долл.

На начало 2007 г. объем государственного внутреннего долга составил 1032 млрд руб. На среднесрочные и долгосрочные облигации федерального займа приходилось 96%, а остальная часть — на государственные краткосрочные и среднесрочные облигации.

Государственные ценные бумаги размещались в 2006—2007 гг. под процентную ставку 5,5—7% годовых. При годовом темпе прироста инфляции 10% доходность резидентов была отрицательной и составила −3—4,5% в год. Для иностранцев (например, европейцев) эта доходность была положительной. Пусть иностранец, совершая финансовую операцию, в процессе которой за евро покупает рубли по курсу 36 руб./евро, вкладывает полученные рубли в государственные ценные бумаги и через один год получает доход в рублях, которые продает по курсу 36,5 руб./евро. Темп прироста инфляции евро принимаем равным 1,5% в год. Реальная, очищенная от инфляции доходность инвестора будет определяться по формуле

$$a = \frac{1+r}{\sqrt[n]{I_k I_{p,\,\text{СКВ}}}} - 1,$$

где a — реальная, очищенная от инфляции годовая доходность инвестора; r — годовая брутто-доходность по ценной бумаге; n — срок финансовой операции в годах; $I_p = 1 + H$ — индекс цен выбранной валюты за срок финансовой операции, H — темп прироста инфляции выбранной валюты за срок финансовой операции; $I_k = \frac{K_1}{K_0}$ — индекс курсов, K_0 — курс рубля при покупке, K_1 — курс рубля при продаже.

Подставив исходные данные в формулу, найдем доходность иностранного инвестора:

$$a = \frac{1+\left(0{,}055;\quad 0{,}07\right)}{\sqrt[1]{\frac{36{,}5}{36}\cdot 1{,}015}} - 1 = 0{,}025;\quad 0{,}04.$$

Таким образом, очищенная от инфляции доходность иностранного инвестора лежит в диапазоне от 2,5 до 4% годовых. Напомним, что в США усредненная за 63 года чистая доходность по казначейскому векселю составляла 0,5% годовых.

В перспективном финансовом плане, утвержденном Правительством РФ, объем внутреннего и внешнего государственного долга на конец 2008 г. составит 2896 млрд руб., на конец 2009 г. — 3233 млрд руб.

13.11. Мультипликаторы для закрытой и открытой экономики

Рассмотрим влияние на развитие экономики государственных расходов и налогов в краткосрочной перспективе.

Мультипликатор автономных расходов, к которым относятся также и государственные расходы, в условиях полной занятости был рассмотрен в § 6.7.

При анализе мультипликатора государственных расходов в закрытой экономике чистый экспорт не учитывается. Для простого мультипликатора Кейнса (налоги отсутствуют) используется модель «кейнсианский крест» (рис. 13.9).

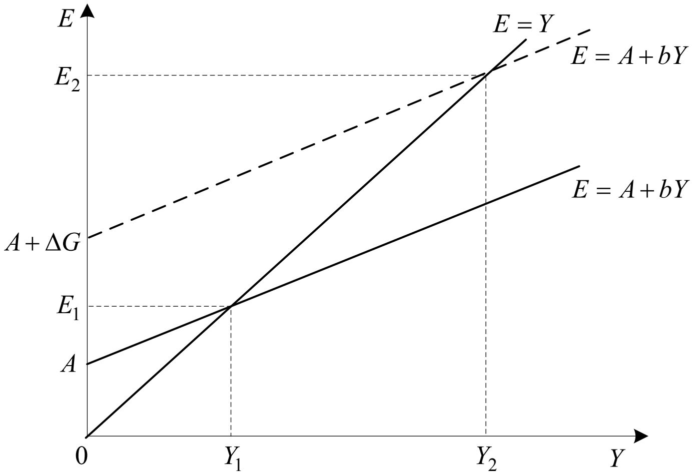


Рис. 13.9. **Крест Кейнса**

В закрытой экономике запланированные расходы — это сумма средств, которую домохозяйства, фирмы и правительство планируют истратить на товары и услуги. Запланированные расходы E при отсутствии налогов определяются соотношением

$$E = C + I + G = A + bY,$$

где $C = a + bY$ — потребительские расходы домашних хозяйств; I — инвестиции; G — государственные расходы; $A = a + I + G$ — сумма автономных запланированных расходов; a — автономное потребление, не зависящее от размеров дохода и характеризующее минимальный уровень этого потребления, необходимый людям; b — предельная склонность к потреблению; Y — доход.

Изменение государственных запланированных расходов на величину ΔG приведет к смещению линии запланированных расходов. Увеличение государственных запланированных расходов сместит эту линию вверх, а уменьшение — вниз.

Любое изменение государственных расходов приведет к большему изменению дохода. Связано это с эффектом мультипликатора государственных расходов.

Мультипликатором государственных расходов называется отношение изменения дохода от равновесного к изменению автономных расходов, вызвавшему это изменение дохода. Мультипликатор государственных расходов M определяется по формуле

$$M = \frac{\Delta Y}{\Delta G},$$

где ΔY — приращение выпуска; ΔG — приращение суммы государственных запланированных расходов.

Различия в объемах изменения выпуска и изменения государственных расходов связано с тем, что однократное изменение государственных расходов порождает многократное изменение выпуска. Формула для определения мультипликатора при отсутствии налогов была получена в § 6.7. Эта формула имеет вид:

$$M = \frac{1}{1-b},$$

где b — предельная склонность к потреблению.

Эта формула называется *моделью простого мультипликатора Кейнса.*

Формулы для различных моделей экономики можно получить также из основного макроэкономического тождества. Рассматриваемые модели отличаются друг от друга степенью подробности при учете факторов, влияющих на выпуск (внутренний валовой продукт). Самая простая модель не учитывает чистого экспорта (закрытая экономика) и налогов. Ее основой является следующее основное макроэкономическое тождество: $Y = C + I + G$. Подставив сюда потребительскую функцию $C = a + bY$, получим $Y = a + bY + I + G$. Перепишем это уравнение в виде: $Y = \frac{a + I + G}{1-b}$. По условию модели это соотношение является функцией одной переменной, т.е. $Y = Y(G)$. Производная этой функции имеет вид:

$$\frac{dY}{dG} = \frac{1}{1-b}.$$

Переходя от дифференциалов к приращениям, получим формулу для мультипликатора:

$$M = \frac{\Delta Y}{\Delta G} = \frac{1}{1-b}.$$

Эта формула для мультипликатора совпала с полученной ранее.

При учете налогов формула для мультипликатора изменится. Налоговую функцию представим в виде:

$$N = N_a + g \cdot Y,$$

где N_a — автономные налоги, не зависящие от величины текущего дохода, например, налог на имущество, налог с продаж и пр.; $g = \frac{\Delta N}{\Delta Y}$ — предельная налоговая ставка, ΔN — приращение налога, вызванное приращением дохода, ΔY — приращение дохода.

Потребительская функция в этом случае приобретает вид:

$$C = a + b\left(Y - N_a - g \cdot Y\right) = a + b \cdot Y\left(1-g\right) - b \cdot N_a,$$

где N_a — совокупный налог; $Y - N_a - g \cdot Y$ — располагаемый доход.

После увеличения государственных расходов на ΔG увеличится также и налог на величину $\Delta G \cdot g \cdot Y$. Основное макроэкономическое тождество при полученной потребительской функции приобретает вид:

$$Y = a + b \cdot Y\left(1-g\right) - b \cdot N_a + I + G.$$

Перепишем это уравнение в виде:

$$Y = \frac{a - b \cdot N_a + I + G}{1 - b \cdot \left(1-g\right)}.$$

Получили функцию одной переменной, т.е. $Y = Y\left(G\right)$, так как было принято, что остальные параметры не зависят от выхода. Производная этой функции равна:

$$\frac{dY}{dG} = \frac{1}{1 - b \cdot \left(1-g\right)}.$$

Переходя от дифференциалов к приращениям, получим формулу для расчета мультипликатора:

$$M = \frac{\Delta Y}{\Delta G} = \frac{1}{1 - b \cdot (1 - g)}.$$

Из этого выражения, в частности, следует, что чем больше предельная ставка налогообложения, тем меньше мультипликатор и тем слабее он действует.

В открытой экономике в основном макроэкономическом тождестве надо учитывать чистый экспорт (разность между экспортом и импортом). Тогда основное макроэкономическое тождество можно записать в виде:

$$Y = C + I + G + X_n,$$

где $X_n = X_{n0} - m' \cdot Y$ — чистый экспорт, $m' = \frac{\Delta M}{\Delta Y}$ — предельная склонность к импортированию, ΔM — приращение расходов на импорт, вызванное приращением дохода, ΔY — приращение дохода.

Подставив в это тождество потребительскую функцию $C = a + b \cdot Y(1 - g) - b \cdot N_a$ и чистый экспорт, получим

$$Y = a + b \cdot Y(1 - g) - b \cdot N_a + I + G + X_{n0} - m' \cdot Y.$$

Перепишем уравнение в виде:

$$Y = \frac{a - b \cdot N_a + I + G + X_{n0}}{1 - b \cdot (1 - g) + m'}. \qquad \textbf{(13.17)}$$

Так же, как и в предыдущем случае, получили функцию одной переменной. Ее производная равна:

$$\frac{dY}{dG} = \frac{1}{1 - b \cdot (1 - g) + m'}.$$

Переходя к приращениям, получим формулу для расчета мультипликатора:

$$M = \frac{\Delta Y}{\Delta G} = \frac{1}{1 - b \cdot (1 - g) + m'}.$$

Отсюда следует, что увеличение предельной склонности к импортированию снижает действие мультипликатора.

Изменение налоговой ставки также приводит к эффекту мультипликатора. Для нахождения формулы для этого мультипликатора полученное выше уравнение **(13.17)** надо представить как функцию налоговой ставки, т.е. $Y = Y(g)$. Производная этой функции равна:

$$\frac{dY}{dg} = -b\frac{a - b \cdot N_a + I + G + X_{n0}}{\left(1 - b \cdot (1-g) + m'\right)^2} = -b\frac{Y - b \cdot Y(1-g) + m' \cdot Y}{\left(1 - b \cdot (1-g) + m'\right)^2} = $$
$$= -\frac{bY}{1 - b \cdot (1-g) + m'}.$$

Перепишем это соотношение в виде:

$$\frac{dY}{Y \cdot dg} = -\frac{b}{1 - b \cdot (1-g) + m'}.$$

Выпуск, умноженный на дифференциал налоговой ставки, является дифференциалом налога, т.е. $Y \cdot dg = dN$. Отсюда следует выражение для производной от выпуска по налогу:

$$\frac{dY}{dN} = -\frac{b}{1 - b \cdot (1-g) + m'}.$$

Переходя к приращениям, получим формулу для налогового мультипликатора:

$$M = \frac{\Delta Y}{\Delta N} = -\frac{b}{1 - b \cdot (1-g) + m'}.$$

В рассмотренной модели налогового мультипликатора изменение налога никак не влияло на государственные расходы. Реальное изменение налогов приводит к изменению государственных расходов. Для такой модели функцию для выпуска рассматривают как функцию двух переменных: G (государственные расходы) и g (налоговая ставка). Найдем приращение выпуска при приращении того и другого аргумента. Для этого используется формула для дифференциала многомерной функции:

$$dY = \frac{\partial Y}{\partial G}dG + \frac{\partial Y}{\partial g}dg.$$

Подставив сюда уравнение **(13.17)** и проведя необходимые преобразования, получим

$$\Delta Y = \frac{1}{1-b\cdot\left(1-g\right)+m'}\cdot\Delta G - \frac{b}{1-b\cdot\left(1-g\right)+m'}\cdot\Delta N. \qquad \textbf{(13.18)}$$

Из полученной формулы видно, что увеличение налога ведет к снижению приращения выпуска. С другой стороны, увеличение налога должно приводить к увеличению государственных расходов. А это ведет к увеличению выпуска. Мультипликатор сбалансированного бюджета получают из условия равенства приращения налоговых поступлений приращению государственных расходов, т.е. при условии $\Delta G = \Delta N$. Формула для этого мультипликатора приобретает вид:

$$M = \frac{1-b}{1-b\cdot\left(1-g\right)+m'}.$$

Из этой формулы, в частности, следует, что мультипликатор сбалансированного бюджета всегда меньше единицы. А это значит, что приращение выхода будет меньше, чем приращение налогов. При этом следует помнить, что приращение налогов равно приращению бюджета. Также следует иметь в виду, что приращение налогов и приращение бюджета имеют один и тот же знак. При снижении налогов приращение налогов и государственных расходов становится отрицательным. А это значит, что первое слагаемое в формуле **(13.18)** становится положительным, а второе — отрицательным.

Упражнения

Задача 13.1. Месячная добавленная стоимость предприятия, на котором работают 12 чел., равна 1 млн руб. Причем на первые 10 человек начисляется заработная плата по 5% от фонда заработной платы, на 11-го сотрудника — 20%, а на 12-го сотрудника — 30% от этого фонда.

Определить начисляемую и чистую месячную заработную плату каждого сотрудника, а также величину налога, учитываемого с каждого сотрудника, при условии, что чистая прибыль предприятия равна нулю. Ставка подоходного налога с физических лиц определяется формулой $g_Z = 0,6 - e^{-1,5\cdot 10^{-5}\cdot 4055,04}\cdot e^{-1,5\cdot 10^{-5}\cdot Z}$. Ставки по остальным основным налогам: налог на добавленную стоимость — 18%, единый социальный налог — 26%.

Задача 13.2. Для ставки подоходного налога с физических лиц, определяемого формулой $g_Z = 0{,}6 - e^{-1{,}5\cdot 10^{-5}\cdot 4055{,}04}\cdot e^{-1{,}5\cdot 10^{-5}\cdot Z}$, построить график зависимости этой ставки от величины начисляемой заработной платы при условии, что чистая прибыль предприятия равна нулю.

Задача 13.3. Для ставки подоходного налога с физических лиц, определяемого формулой $g_Z = 0{,}6 - e^{-1{,}5\cdot 10^{-5}\cdot 4055{,}04}\cdot e^{-1{,}5\cdot 10^{-5}\cdot Z}$, построить график зависимости чистой заработной платы от величины начисляемой заработной платы при условии, что чистая прибыль предприятия равна нулю.

Задача 13.4. Построить график отношения суммы подоходного налога с физических лиц к добавленной стоимости, график эффективной ставки подоходного налога с физических лиц и график эффективной налоговой ставки (отношения суммарной выплаты по основным налогам к добавленной стоимости) от отношения чистой прибыли к добавленной стоимости. Месячная добавленная стоимость предприятия, на котором работают 12 чел., равна 1 млн руб. Причем на первые 10 человек начисляется заработная плата по 5% от фонда заработной платы, на 11-го сотрудника — 20%, а на 12-го сотрудника — 30% от этого фонда. Подоходный налог с физических лиц определяется соотношениями

$$g_Z = 0{,}6 - e^{-1{,}5\cdot 10^{-5}\cdot 4055{,}04}\cdot e^{-1{,}5\cdot 10^{-5}\cdot Z} \quad \text{при } Z > 30\,000 \text{ руб.};$$

$$g_Z = 0 \quad \text{при } Z < 30\,000 \text{ руб.}$$

Ставки по остальным основным налогам: налог на добавленную стоимость — 18%, единый социальный налог — 26%, налог на прибыль — 24%.

Библиографический список

1. *Агапова Т.А.*, *Серегина С.Ф.* Макроэкономика. М.: ДиС, 1997.
2. *Вечканов Г.С.*, *Вечканова Г.Р.* Макроэкономика. М.: Питер, 2006.
3. *Киселева Е.А.* Макроэкономика. М.: Эксмо, 2007.
4. *Налоговый* кодекс РФ. М.: НАЛОГ-ИНФО, 2007.
5. *Экономическая* теория / Под ред. В.И. Видяпина и др. М.: ИНФРА-М, 2000.

Ответы и решения

Глава 1

Тест 1.1. Правильный ответ: 1, 2, 3, 4.

Задача 1.1. Уравнения для новых условий задачи принимают вид:

$$\begin{aligned} (1-0{,}15)\,p_1 - 0{,}14p_2 &= 0{,}8; \\ -0{,}4p_1 + (1-0{,}12)\,p_2 &= 3{,}6. \end{aligned}$$

Правые части уравнений системы равны показателям матрицы, так как цена одного человеко-года труда была принята равной 1 ден. ед.:

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}85 & -0{,}14 \\ -0{,}4 & 0{,}88 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}8 \\ 3{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}272 & 0{,}202 \\ 0{,}578 & 1{,}223 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}8 \\ 3{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}746 \\ 4{,}884 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, новая цена 1 ед. сельскохозяйственной продукции равна 1,746 ден. ед., а 1 ед. промышленной продукции — 4,884 ден. ед.

Глава 2

Задача 2.1. Характеристическое уравнение этой матрицы имеет вид:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0\,,\ \ \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0\,.$$

Корни этого уравнения

$$\lambda_{1,2} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 10} = \frac{7 \pm 3}{2}, \quad \lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = 2\,.$$

Для двух переменных система уравнений **(2.13)** имеет вид:

$$\begin{cases} (3-\lambda)\,x_1 + 2x_2 = 0, \\ x_1 + (4-\lambda)\,x_2 = 0. \end{cases}$$

Подставив сюда значения корней $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 2$, получим две системы уравнений:

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 = 0, \\ \quad x_1 - x_2 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0, \\ x_1 + 2x_2 = 0. \end{cases}$$

Каждая система является одним уравнением, что и следовало ожидать. Это связано с тем, что определитель системы равен нулю.

Из первой системы для $\lambda_1 = 5$ и из второй для $\lambda_2 = 2$ следует, что координаты собственных векторов связаны соотношениями

$$x_1 = x_2\,,\ \ x_1 = -2x_2\,.$$

Поскольку x_2 — произвольное число, то любому собственному значению матрицы соответствует бесконечное множество собственных векторов различной длины. Положим $x_2 = b$, где $b \neq 0$ — любое число. Тогда собственные векторы можно записать в виде:

$$\lambda_1 = 5, \quad \overline{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix}; \qquad \lambda_2 = 2, \quad \overline{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} -2b \\ b \end{pmatrix}.$$

Задача 2.2. Решение этой системы имеет вид **(2.16)**:

$$X^{(t)} = \left(E - A - B\right)^{-1} \cdot \left(Y^{(t)} - B \cdot X^{(t-1)}\right).$$

Найдем сумму матриц $A + B$:

$$A + B = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,4 \\ 0,2 & 0,5 & 0,0 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,06 & 0,02 & 0,08 \\ 0,04 & 0,10 & 0,00 \\ 0,06 & 0,02 & 0,08 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,36 & 0,12 & 0,48 \\ 0,24 & 0,60 & 0,00 \\ 0,36 & 0,12 & 0,28 \end{pmatrix}.$$

Матрица $A + B$ является продуктивной, так как сумма величин любого столбца более единицы.

Матрица $E - A - B = E - \left(A + B\right)$ имеет вид:

$$E - A - B = \begin{pmatrix} 0,64 & -0,12 & -0,48 \\ -0,24 & 0,40 & 0,00 \\ -0,36 & -0,12 & 0,72 \end{pmatrix}.$$

Определим обратную матрицу $\left(E - A - k\right)^{-1}$:

$$\left(E - A - k\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{25}{7} & \frac{25}{14} & \frac{50}{21} \\ \frac{15}{7} & \frac{25}{7} & \frac{10}{7} \\ \frac{15}{7} & \frac{125}{84} & \frac{355}{126} \end{pmatrix}.$$

Величины валовой продукции трех отраслей определим по формуле $X^{(t)} = \left(E - A - B\right)^{-1} \cdot \left(Y^{(t)} - B \cdot X^{(t-1)}\right)$. Найдем вначале произведение двух матриц:

$$B \cdot X^{t-1} = \begin{pmatrix} 0,06 & 0,02 & 0,08 \\ 0,04 & 0,10 & 0,00 \\ 0,06 & 0,02 & 0,08 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 775,5102 \\ 510,2041 \\ 729,5918 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 115,102 \\ 82,0408 \\ 115,102 \end{pmatrix}.$$

Затем определим разность матриц:

$$\tilde{Y} - k \cdot X^{t-1} = \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 400 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 115,102 \\ 82,0408 \\ 115,102 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 184,898 \\ 117,9592 \\ 284,898 \end{pmatrix}.$$

Подставив полученные результаты в исходную формулу, получим вектор валовой продукции отраслей:

$$X^t = \left(E - A - k\right)^{-1}\left(\tilde{Y} - kX^{t-1}\right) = \begin{pmatrix} \frac{25}{7} & \frac{25}{14} & \frac{50}{21} \\ \frac{15}{7} & \frac{25}{7} & \frac{10}{7} \\ \frac{15}{7} & \frac{125}{84} & \frac{355}{126} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 184,898 \\ 117,9592 \\ 284,898 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1549,32 \\ 1224,49 \\ 1374,43 \end{pmatrix}.$$

Прирост валовой продукции i-й отрасли определяется по формуле

$$X^t - X^{t-1} = \begin{pmatrix} 1549,32 \\ 1224,49 \\ 1374,43 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 775,5102 \\ 510,2041 \\ 729,5918 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 773,810 \\ 714,286 \\ 644,838 \end{pmatrix}.$$

Поставка продукции фондообразующей отрасли i на инвестиционные цели отрасли j находят из соотношения

$$z_{ij}^{(t)} = b_{ij}^{(t)}\left(x_j^{(t)} - x_j^{(t-1)}\right).$$

Подставив сюда полученные результаты, найдем:

$$z_{11}^{(t)} = b_{11}^{(t)}\left(x_1^{(t)} - x_1^{(t-1)}\right) = 0,06 \cdot 773,81 = 46,43\;;$$

$$z_{12}^{(t)} = b_{12}^{(t)}\left(x_2^{(t)} - x_2^{(t-1)}\right) = 0,02 \cdot 714,286 = 14,29\;;$$

$$z_{13}^{(t)} = b_{13}^{(t)}\left(x_3^{(t)} - x_3^{(t-1)}\right) = 0,08 \cdot 644,838 = 51,59\;;$$

$$z_{21}^{(t)} = b_{21}^{(t)}\left(x_1^{(t)} - x_1^{(t-1)}\right) = 0,04 \cdot 773,81 = 30,95\;;$$

$$z_{22}^{(t)} = b_{22}^{(t)}\left(x_2^{(t)} - x_2^{(t-1)}\right) = 0,1 \cdot 714,286 = 71,43\;;$$

$$z_{23}^{(t)} = b_{23}^{(t)}\left(x_3^{(t)} - x_3^{(t-1)}\right) = 0 \cdot 644,838 = 0\;;$$

$$z_{31}^{(t)} = b_{31}^{(t)}\left(x_1^{(t)} - x_1^{(t-1)}\right) = 0,06 \cdot 773,81 = 46,43\;;$$

$$z_{32}^{(t)} = b_{32}^{(t)}\left(x_2^{(t)} - x_2^{(t-1)}\right) = 0,2 \cdot 714,286 = 14,29 \ ;$$

$$z_{23}^{(t)} = b_{23}^{(t)}\left(x_3^{(t)} - x_3^{(t-1)}\right) = 0,08 \cdot 644,838 = 51,59 \ .$$

Проведем проверку, подставив результаты в правую часть исходной формулы:

$$X^{(t)} = AX^{(t)} + B\left(X^{(t)} - X^{(t-1)}\right) + Y^{(t)};$$

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,4 \\ 0,2 & 0,5 & 0,0 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1549,32 \\ 1224,49 \\ 1374,43 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,06 & 0,02 & 0,08 \\ 0,04 & 0,10 & 0,00 \\ 0,06 & 0,02 & 0,08 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 773,810 \\ 714,286 \\ 644,838 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 400 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1137,02 \\ 922,11 \\ 862,13 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 112,30 \\ 102,38 \\ 112,30 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1549,32 \\ 1224,49 \\ 1374,43 \end{pmatrix}.$$

Задача 2.3. Максимальный темп сбалансированного роста производства и минимальную норму процента определим по формуле

$$\overline{\lambda} = \overline{r} = \frac{P^{(0)}Bx^{(0)}}{P^{(0)}Ax^{(0)}} - 1 = \frac{\left(216 \ 162\right)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 100 \\ 125 \end{pmatrix}}{\left(216 \ 162\right)\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 112/81 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 100 \\ 125 \end{pmatrix}} - 1 = 0,08.$$

Луч Неймана, или магистраль, соответствующая максимальному сбалансированному росту, определяется соотношением

$$\overline{X}^{(t)} = \left(1 + \overline{\lambda}\right)^t \cdot \overline{X}^{(0)} = 1,08^t \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 125 \end{pmatrix}.$$

Глава 3

Задача 3.1. Эластичность замещения фондов трудовыми ресурсами находят по формуле

$$E_L\left(K\right) = -\frac{a_2}{a_1} = -\frac{0,594}{0,539} = -1,1.$$

Эластичность замещения трудовых ресурсов фондами определяется соотношением

$$E_K\left(L\right) = -\frac{a_1}{a_2} = -\frac{0,539}{0,594} = -0,91 \ .$$

Таким образом, при увеличении труда на 1% капитал уменьшится на 1,1%, а при увеличении капитала на 1% труд уменьшится на 0,91%.

Задача 3.2. Подставив в производственную функцию Кобба—Дугласа $Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$ исходные данные задачи, получим:

$$8 = 10^{\alpha} \cdot 5^{1-\alpha}.$$

Прологарифмировав полученное соотношение, найдем:

$$\lg 8 = \alpha + (1-\alpha) \cdot \lg 5 = \alpha + \lg 5 - \alpha \cdot \lg 5.$$

Отсюда находим эластичность выпуска по основным фондам:

$$\alpha = \frac{\lg 8 - \lg 5}{1 - \lg 5} = 0,68.$$

Таким образом, производственная функция завода имеет вид:

$$Y = K^{0,68}L^{0,32}.$$

Найдем новое количество работников, необходимых для увеличения годового выпуска завода на 0,5 млрд руб. Для этого запишем уравнение

$$8,5 = 10^{0,68}L^{0,32}.$$

Возведем левую и правую части этого уравнения в степень $1/0,32$:

$$8,5^{1/0,32} = 10^{0,68/0,32}L.$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$L = \frac{8,5^{1/0,32}}{10^{0,68/0,32}} = \frac{802,5}{133,35} = 6,02.$$

Таким образом, для увеличения годового выпуска завода на 0,5 млрд руб. потребуется увеличить количество работников на 6020 − − 5000 = 1020 чел.

Глава 4

Задача 4.1. Найдем точку спроса. Задачу потребительского выбора для рассматриваемого случая можно записать в виде:

$$x_1^{a_1}x_2^{a_2} \to \max$$

при условиях

$$p_1x_1 + p_2x_2 \le I, \; x_1 > 0, \quad x_2 > 0.$$

Функция Лагранжа имеет вид:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = x_1^{a_1}x_2^{a_2} + \lambda(I - p_1x_1 + p_2x_2).$$

Найдем первые производные и приравняем их нулю:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} &= a_1 x_1^{a_1-1} x_2^{a_2} - \lambda p_1 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} &= a_2 x_1^{a_1} x_2^{a_2-1} - \lambda p_2 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= I - p_1 x_1 + p_2 x_2 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(OP.1)}$$

Умножим первое уравнение на x_1, а второе – на x_2 и сложим первое со вторым:

$$\left(a_1 + a_2\right) x_1^{a_1} x_2^{a_2} - \lambda\left(p_1 x_1 + p_2 x_2\right) = 0.$$

Учитывая последнее уравнение системы **(OP.1)**, получим:

$$\left(a_1 + a_2\right) x_1^{a_1} x_2^{a_2} = \lambda I.$$

Разделим это уравнение на первое уравнение системы **(OP.1):**

$$\frac{\left(a_1 + a_2\right) x_1}{a_1} = \frac{I}{p_1}.$$

Отсюда находим точку спроса для товара x:

$$x_1^* = \frac{a_1}{a_1 + a_2} \cdot \frac{I}{p_1}.$$

Аналогично находим

$$x_2^* = \frac{a_2}{a_1 + a_2} \cdot \frac{I}{p_2}.$$

Так как $\frac{\partial x_1^*}{\partial I} = \frac{a_1}{a_1 + a_2} \cdot \frac{1}{p_1} > 0$ и $\frac{\partial x_2^*}{\partial I} = \frac{a_2}{a_1 + a_2} \cdot \frac{1}{p_2} > 0$, то оба товара являются ценными.

Производные $\frac{\partial x_1^*}{\partial p_1} = -\frac{a_1}{a_1 + a_2} \cdot \frac{I}{p_1^2} < 0$ и $\frac{\partial x_2^*}{\partial p_2} = -\frac{a_2}{a_1 + a_2} \cdot \frac{I}{p_2^2} < 0$, поэтому оба товара являются нормальными.

Уравнение Слуцкого для второго товара можно записать:

$$\frac{\partial x^*}{\partial p_2} = \left(\frac{\partial x^*}{\partial p_2}\right)_{\text{комп}} - \frac{\partial x^*}{\partial I} x_2^*.$$

Отсюда имеем:

$$\left(\frac{\partial x^*}{\partial p_2}\right)_{\text{комп}} = \frac{\partial x^*}{\partial p_2} + \frac{\partial x^*}{\partial I} x_2^*.$$

Для первого товара соотношение, характеризующее влияние компенсирующего изменения цены на спрос, можно записать в виде:

$$\left(\frac{\partial x_1^*}{\partial p_2}\right)_{\text{комп}} = \frac{\partial x_1^*}{\partial p_2} + \frac{\partial x_1^*}{\partial I} x_2^* = 0 + \frac{a_1}{a_1+a_2}\cdot\frac{1}{p_1}\cdot\frac{a_2}{a_1+a_2}\cdot\frac{I}{p_2} =$$
$$= \frac{a_1}{(a_1+a_2)\,p_1}\cdot\frac{a_1}{(a_1+a_2)\,p_2}\cdot I > 0.$$

Так как эта величина больше нуля, то товары взаимозаменяемые:

$$\left(\frac{\partial x_2^*}{\partial p_2}\right)_{\text{комп}} = \frac{\partial x_2^*}{\partial p_2} + \frac{\partial x_2^*}{\partial I} x_2^* = -\frac{a_2}{a_1+a_2}\cdot\frac{I}{p_2^2} + \frac{a_2}{a_1+a_2}\cdot\frac{1}{p_2}\cdot\frac{a_2}{a_1+a_2}\cdot\frac{I}{p_2} =$$
$$= -\frac{a_2}{a_1+a_2}\cdot\frac{I}{p_2^2}\left(1-\frac{a_2}{a_1+a_2}\right) = -\frac{a_1\cdot a_2}{(a_1+a_2)^2}\cdot\frac{I}{p_2^2} < 0.$$

Как и следовало ожидать, $\left(\frac{\partial x_2^*}{\partial p_2}\right)_{\text{комп}} < 0$.

Задача 4.2. Эту задачу математического программирования можно заменить задачей на условный экстремум:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^b \to \max$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i - I = 0,$$
$$x_i > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Функцию Лагранжа запишем в виде:

$$L(x_1, \ldots, x_n, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^b - \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i - I\right).$$

Составляем систему линейных уравнений, для чего приравниваем нулю первые частные производные функции Лагранжа:

$$\frac{\partial L\left(x_1, ..., x_n, \lambda\right)}{\partial x_i} = \frac{\partial \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^b}{\partial x_i} - \lambda p_i = \frac{b a_i}{x_i^{1-b}} - \lambda p_i = 0. \qquad \textbf{(OP.2)}$$

$$\frac{\partial L\left(x_i, \lambda\right)}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i - I = 0. \qquad \textbf{(OP.3)}$$

Из уравнения **(ОР.2)** находим:

$$x_i^{1-b} = \frac{b a_i}{\lambda p_i} \text{ или } x_i = \frac{b^{\frac{1}{1-b}} a_i^{\frac{1}{1-b}}}{\lambda^{\frac{1}{1-b}} p_i^{\frac{1}{1-b}}}. \qquad \textbf{(OP.4)}$$

Подставив выражение **(ОР.4)** в **(ОР.3)** , получим:

$$\frac{b^{\frac{1}{1-b}}}{\lambda^{\frac{1}{1-b}}} \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{a_i^{\frac{1}{1-b}}}{p_i^{\frac{1}{1-b}}} = I.$$

Отсюда находим:

$$\frac{1}{\lambda^{\frac{1}{1-b}}} = \frac{I}{b^{\frac{1}{1-b}} \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^{\frac{1}{1-b}}}{p_i^{\frac{1}{1-b}-1}}}.$$

Подставив это в **(ОР.4)**, найдем функцию спроса:

$$x_i^* = \frac{I}{b^{\frac{1}{1-b}} \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^{\frac{1}{1-b}}}{p_i^{\frac{1}{1-b}-1}}} \cdot \frac{b^{\frac{1}{1-b}} a_i^{\frac{1}{1-b}}}{p_i^{\frac{1}{1-b}}} = I \frac{\left(\frac{a_i}{p_i}\right)^{\frac{1}{1-b}}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^{\frac{1}{1-b}}}{p_i^{\frac{1}{1-b}-1}}}.$$

Найдем производные $\dfrac{\partial x_i^*}{\partial p_j}$, $i \neq j$:

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial p_j} = -I\left(\frac{a_i}{p_i}\right)^{\frac{1}{1-b}} \frac{\dfrac{\partial\left(\dfrac{a_j^{\frac{1}{1-b}}}{p_j^{\frac{1}{1-b}-1}}\right)}{\partial p_j}}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{a_i^{\frac{1}{1-b}}}{p_i^{\frac{1}{1-b}-1}}\right)^2} =$$

$$= -\frac{I\left(\dfrac{a_i}{p_i}\right)^{\frac{1}{1-b}}}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{a_i^{\frac{1}{1-b}}}{p_i^{\frac{1}{1-b}-1}}\right)^2}\left(-\frac{1}{1-b}+1\right)\left(\frac{a_j}{p_j}\right)^{\frac{1}{1-b}} = \frac{b}{1-b} I \frac{\left(\dfrac{a_i}{p_i}\right)^{\frac{1}{1-b}}\left(\dfrac{a_j}{p_j}\right)^{\frac{1}{1-b}}}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{a_j^{\frac{1}{1-b}}}{p_j^{\frac{1}{1-b}-1}}\right)^2}.$$

Так как эти производные больше нуля, то функция спроса на товары обладает свойством сильной валовой заменимости.

Задача 4.3. Поскольку инвестиционные выплаты производятся в конце первого и второго года, то при решении этой задачи надо дисконтировать не только доходы, но и инвестиции.

Чистый приведенный доход:

$$W_{1,10} = -\frac{5}{1,1} - \frac{20}{1,1^2} + \frac{3}{1,1^3} + \frac{10}{1,1^4} + \frac{10}{1,1^5} + \frac{20}{1,1^6} + \frac{20}{1,1^7} = 15,77;$$

$$W_{2,10} = -\frac{20}{1,1} - \frac{5}{1,1^2} + \frac{5}{1,1^3} + \frac{10}{1,1^4} + \frac{10}{1,1^5} + \frac{20}{1,1^6} + \frac{20}{1,1^7} = 16,03;$$

$$W_{1,20} = -\frac{5}{1,2} - \frac{20}{1,2^2} + \frac{3}{1,2^3} + \frac{10}{1,2^4} + \frac{10}{1,2^5} + \frac{20}{1,2^6} + \frac{20}{1,2^7} = 4,8;$$

$$W_{2,20} = -\frac{20}{1,2} - \frac{5}{1,2^2} + \frac{5}{1,2^3} + \frac{10}{1,2^4} + \frac{10}{1,2^5} + \frac{20}{1,2^6} + \frac{20}{1,2^7} = 3,88.$$

Индекс прибыльности:

$$U_{1,10} = \frac{\frac{3}{1,1^3}+\frac{10}{1,1^4}+\frac{10}{1,1^5}+\frac{20}{1,1^6}+\frac{20}{1,1^7}}{\frac{5}{1,1}+\frac{20}{1,1^2}} = 1,748;$$

$$U_{2,10} = \frac{\frac{5}{1,1^3}+\frac{10}{1,1^4}+\frac{10}{1,1^5}+\frac{20}{1,1^6}+\frac{20}{1,1^7}}{\frac{20}{1,1}+\frac{5}{1,1^2}} = 1,719;$$

$$U_{1,20} = \frac{\frac{3}{1,2^3}+\frac{10}{1,2^4}+\frac{10}{1,2^5}+\frac{20}{1,2^6}+\frac{20}{1,2^7}}{\frac{5}{1,2}+\frac{20}{1,2^2}} = 1,266;$$

$$U_{2,20} = \frac{\frac{5}{1,2^3}+\frac{10}{1,2^4}+\frac{10}{1,2^5}+\frac{20}{1,2^6}+\frac{20}{1,2^7}}{\frac{20}{1,2}+\frac{5}{1,2^2}} = 1,192.$$

Срок окупаемости:

$$K_{1,10} = 5(1+0,1)+20 = 25,5; \quad A_1 = \frac{3}{1,1} = 2,73; \quad A_2 = \frac{3}{1,1}+\frac{10}{1,1^2} = 10,99;$$

$$A_3 = \frac{3}{1,1}+\frac{10}{1,1^2}+\frac{10}{1,1^3} = 18,5; \quad A_4 = \frac{3}{1,1}+\frac{10}{1,1^2}+\frac{10}{1,1^3}+\frac{20}{1,1^4} = 32,165;$$

$$n_{\text{ок}1,10} = 3+\frac{25,5-18,5}{32,165-18,5} = 3,51 \text{ года};$$

$$K_{2,10} = 20(1+0,1)+5 = 27; \quad A_2 = \frac{5}{1,1}+\frac{10}{1,1^2} = 12,81;$$

$$A_3 = \frac{5}{1,1}+\frac{10}{1,1^2}+\frac{10}{1,1^3} = 20,323; \quad A_4 = \frac{5}{1,1}+\frac{10}{1,1^2}+\frac{10}{1,1^3}+\frac{20}{1,1^4} = 33,983;$$

$$n_{\text{ок}2,10} = 3+\frac{27-20,323}{33,983-20,323} = 3,49 \text{ года};$$

$$K_{1,20} = 5(1+0,2)+20 = 26; \quad A_1 = \frac{3}{1,2} = 2,5; \quad A_2 = \frac{3}{1,2}+\frac{10}{1,2^2} = 9,44;$$

$$A_3=\frac{3}{1,2}+\frac{10}{1,2^2}+\frac{10}{1,2^3}=15,23;$$

$$A_4=\frac{3}{1,2}+\frac{10}{1,2^2}+\frac{10}{1,2^3}+\frac{20}{1,2^4}=24,88;$$

$$A_5=\frac{3}{1,2}+\frac{10}{1,2^2}+\frac{10}{1,2^3}+\frac{20}{1,2^4}+\frac{20}{1,2^5}=32,9;$$

$$n_{\text{ок}1,20}=4+\frac{26-24,88}{32,9-24,88}=4,14\text{ года};\quad A_2=\frac{5}{1,2}+\frac{10}{1,2^2}=11,11;$$

$$A_3=\frac{5}{1,2}+\frac{10}{1,2^2}+\frac{10}{1,2^3}=16,9;\quad A_4=\frac{5}{1,2}+\frac{10}{1,2^2}+\frac{10}{1,2^3}+\frac{20}{1,2^4}=26,54;$$

$$A_5=\frac{5}{1,2}+\frac{10}{1,2^2}+\frac{10}{1,2^3}+\frac{20}{1,2^4}+\frac{20}{1,2^5}=34,58;$$

$$n_{\text{ок}2,20}=4+\frac{29-26,54}{34,58-26,54}=4,306\text{ года}.$$

Внутренняя норма доходности первого проекта находится из уравнения

$$-\frac{5}{1+q_{\text{В},1}}-\frac{20}{\left(1+q_{\text{В},1}\right)^2}+\frac{3}{\left(1+q_{\text{В},1}\right)^3}+\frac{10}{\left(1+q_{\text{В},1}\right)^4}+$$
$$+\frac{10}{\left(1+q_{\text{В},1}\right)^5}+\frac{20}{\left(1+q_{\text{В},1}\right)^6}+\frac{20}{\left(1+q_{\text{В},1}\right)^7}=0.$$

Решая уравнение в Excel, получим $q_{\text{В},1}=28,12\%$.

Аналогично для второго проекта: $q_{\text{В},2}=25,27\%$.

Определим доходность инвестиций. Сумма дисконтированных к началу проекта инвестиций:

$$K_{0,1}=\frac{5}{1,1}+\frac{20}{1,1^2}=21,07;\quad K_{0,2}=\frac{20}{1,1}+\frac{5}{1,1^2}=22,31.$$

Уравнение для определения доходности проектов:

$$\frac{3}{\left(1+r_1\right)^3}+\frac{10}{\left(1+r_1\right)^4}+\frac{10}{\left(1+r_1\right)^5}+\frac{20}{\left(1+r_1\right)^6}+\frac{20}{\left(1+r_1\right)^7}-21,07=0;$$

$$\frac{5}{\left(1+r_2\right)^3}+\frac{10}{\left(1+r_2\right)^4}+\frac{10}{\left(1+r_2\right)^5}+\frac{20}{\left(1+r_2\right)^6}+\frac{20}{\left(1+r_2\right)^7}-22,31=0.$$

Решения этих уравнений равны:

$$r_1 = 21,82\%; \quad r_2 = 22,75\%.$$

Показатели представлены в табл. ОР.1.

Таблица ОР.1

Показатели	$q_1 = 10\%$		$q_2 = 20\%$	
	Проект 1	*Проект 2*	*Проект 1*	*Проект 2*
NPV	15,77	16,03	4,8	3,88
PI	1,748	1,719	1,266	1,192
PBP	3,51	3,49	4,14	4,306
IRR, %	28,12	25,27	28,12	25,27
r, %	21,82	22,75	21,82	22,75

При ставке дисконтирования 20% первый проект имеет преимущества перед вторым по всем показателям кроме доходности. При ставке 10% первый проект имеет преимущества по индексу прибыльности и внутренней норме доходности, а по чистому приведенному доходу, сроку окупаемости и доходности инвестиций преимущества имеет второй проект. В качестве основного критерия выбора проекта принимаем доходность инвестиций. Таким образом, выбираем второй проект.

Глава 5

Задача 5.1. Потребление в начальный момент времени находим из соотношения $1 - \frac{C_0}{10} = 0,5$, т.е. $C_0 = 5$.

А. Это случай, когда $r > \frac{1}{B}$, т.е. темп прироста потребления превышает фондоотдачу. Функция дохода модели в этом случае в зависимости от времени имеет вид:

$$Y(t) = \left(10 - \frac{5}{1 - 10 \cdot 0,2}\right) \cdot e^{0,1 \cdot t} + \frac{5}{1 - 10 \cdot 0,2} e^{0,2 \cdot t} = 15e^{0,1 \cdot t} - 5e^{0,2 \cdot t}.$$

Потребление в модели изменяется по закону

$$C(t) = C_0 e^{r \cdot t} = 5e^{0,2 \cdot t}.$$

Отсюда находим закон изменения инвестиций:

$$I(t) = Y(t) - C(t) = 15e^{0,1\cdot t} - 5e^{0,2\cdot t} - 5e^{0,2\cdot t} = 15e^{0,1\cdot t} - 10e^{0,2\cdot t}.$$

Для определения момента времени, для которого инвестиции будут равны нулю, надо решить уравнение

$$15e^{0,1\cdot t} - 10e^{0,2\cdot t} = 0,\ e^{(0,1-0,2)\cdot t} = \frac{10}{15},\ \ln e^{(0,1-0,2)\cdot t} = \ln\frac{10}{15},\ -0,1t = -0,4,$$
$$t = 4 \text{ года.}$$

Таким образом, через четыре года инвестиции уменьшатся до нуля.

Момент времени, для которого доход будет равен нулю, находят из уравнения

$$15e^{0,1\cdot t} - 5e^{0,2\cdot t} = 0,\ e^{(0,1-0,2)\cdot t} = \frac{5}{15},\ \ln e^{(0,1-0,2)\cdot t} = \ln\frac{1}{3},$$
$$-0,1t = -1,1,\ t = 11 \text{ лет.}$$

Через 11 лет до нуля уменьшится доход.

Б. Этот вариант соответствует случаю, когда $r = \rho_0 = 0,2$. Находим траектории:

$$Y(t) = \left(10 - \frac{5}{1 - 2,5\cdot 0,2}\right)\cdot e^{0,4\cdot t} + \frac{5}{1 - 2,5\cdot 0,2}e^{0,2\cdot t} = 10e^{0,2\cdot t};$$

$$C(t) = C_0 e^{r\cdot t} = 5e^{0,2\cdot t};$$

$$I(t) = Y(t) - C(t) = 10\cdot e^{0,2\cdot t} - 5\cdot e^{0,2\cdot t} = 5\cdot e^{0,2\cdot t}.$$

Таким образом, выпуск, потребление и инвестиции развиваются с годовым приростом, равным 20%.

В. Этот случай соответствует ситуации, когда $\frac{1}{B} > r > \rho_0$, так как $\frac{1}{2,5} > 0,3 > 0,2$. Находим траектории:

$$Y(t) = \left(10 - \frac{5}{1 - 2,5\cdot 0,3}\right)\cdot e^{0,4\cdot t} + \frac{5}{1 - 2,5\cdot 0,3}e^{0,3\cdot t} = -10\cdot e^{0,4\cdot t} + 20e^{0,3\cdot t};$$

$$C(t) = C_0 e^{r\cdot t} = 5e^{0,3\cdot t};$$

$$I(t) = Y(t) - C(t) = -10\cdot e^{0,4\cdot t} + 15e^{0,3\cdot t}.$$

Определим моменты времени, для которых до нуля уменьшатся инвестиции и доход:

$$-10 \cdot e^{0,4 \cdot t} + 15 e^{0,3 \cdot t} = 0,\; e^{0,1 \cdot t} = 1,5,\; t = \frac{\ln 1,5}{0,1} = 4 \text{ года.}$$

Инвестиции уменьшатся до нуля через четыре года.

$$-10 \cdot e^{0,4 \cdot t} + 20 e^{0,3 \cdot t} = 0,\; e^{0,1 \cdot t} = 2,\; t = \frac{\ln 2}{0,1} = 7 \text{ лет.}$$

Доход уменьшится до нуля через семь лет.

Г. Здесь $r < \rho_0$, так как $0,1 < 0,2$. Находим траектории:

$$Y(t) = \left(10 - \frac{5}{1 - 2,5 \cdot 0,1}\right) \cdot e^{0,4 \cdot t} + \frac{5}{1 - 2,5 \cdot 0,1} e^{0,1 \cdot t} = \frac{1}{3} \cdot e^{0,4 \cdot t} + \frac{20}{3} e^{0,1 \cdot t};$$

$$C(t) = C_0 e^{r \cdot t} = 5 e^{0,1 \cdot t};$$

$$I(t) = Y(t) - C(t) = \frac{1}{3} \cdot e^{0,4 \cdot t} + \frac{5}{3} e^{0,3 \cdot t}.$$

Полученные функции возрастают во времени. Однако инвестиции возрастают существенно быстрее, чем потребление. Для начала процесса (при $t = 0$) потребление составляет 5 ед. и инвестиции равны 5 ед. Через 10 лет потребление составит 13,6 ед., а инвестиции будут равны 215 ед., т.е. инвестиции будут превышать потребление в 16 раз.

Задача 5.2. Удельный валовой внутренний продукт описывается уравнением

$$y = \frac{Y}{L} = \left(\frac{K}{L}\right)^{0,4} \cdot \left(\frac{L}{L}\right)^{0,6} = k^{0,4}.$$

На стационарной траектории удельную фондовооруженность k^0 и точку k^* находят из соотношений **(5.14)** и **(5.16)**. Предварительно находят:

$$\lambda = \nu + \mu = 0,02 + 0,03 = 0,05;$$

$$k^0 = \left(\frac{\rho \cdot A}{\lambda}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \left(\frac{0,2}{0,05}\right)^{\frac{1}{1-0,4}} = 10,08 \text{ тыс. руб./чел.}$$

$$k^* = \left(\frac{\alpha \cdot \rho \cdot A}{\lambda}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \left(\frac{0,4 \cdot 0,2}{0,05}\right)^{\frac{1}{1-0,4}} = 2,19 \text{ тыс. руб./чел.}$$

Народнохозяйственная производительность труда на стационарной траектории

$$y^0 = \left(k^0\right)^{\alpha} = 10,08^{0,4} = 2,56 \text{ тыс. руб./чел.}$$

Удельные инвестиции на одного занятого на стационарной траектории

$$i^0 = \rho \cdot y^0 = 0,2 \cdot 2,56 = 0,51 \text{ тыс. руб./чел.}$$

Среднедушевое потребление на одного занятого на стационарной траектории

$$c^0 = (1-\rho)\, y^0 = 0,8 \cdot 2,56 = 2,05 \text{ тыс. руб./чел.}$$

Народнохозяйственная производительность труда в начальный момент времени

$$y_0 = k_0^{\alpha} = 4^{0,4} = 1,74 \text{ тыс. руб./чел.}$$

Среднедушевое потребление на одного занятого в начальный момент времени

$$c_0 = (1-\rho)\, y_0 = 0,8 \cdot 1,74 = 1,39 \text{ тыс. руб./чел.}$$

Траектория фондовооруженности определяется формулой **(5.17)** и при полученных данных может быть представлена в виде:

$$k^{0,6}(t) = 10,06^{0,6} + \left(4^{0,6} - 10,06^{0,6}\right) \cdot e^{-0,03 \cdot t}.$$

Процесс считают установившимся при $k(t) = 0,9 \cdot k^0$. Поэтому, подставив сюда $k(t) = 0,9 \cdot 10,08 = 9,072$ и учитывая, что $10,06^{0,6} = 4$ и $4^{0,6} = 2,3$, получим:

$$9,072^{0,6} - 4 = (2,3-4) \cdot e^{-0,03 \cdot t}; \; 3,755 - 4 = -1,7 \cdot e^{-0,03 \cdot t}; \quad e^{0,03 \cdot t} = 6,94.$$

Решив это уравнение относительно t, найдем время переходного процесса $t_{\text{пер}}$. Прологарифмировав правую и левую части последнего выражения, получим:

$$t_{\text{пер}} = \frac{\ln 6,94}{0,03} = \frac{1,94}{0,03} = 64,6 \text{ года.}$$

Задача 5.3. На стационарной траектории удельная фондовооруженность k^0 и точка k^* равны:

$$k^0 = \left(\frac{\rho \cdot A}{\lambda}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \left(\frac{0,4}{0,05}\right)^{\frac{1}{1-0,4}} = 32 \text{ тыс. руб./чел.}$$

$$k^* = \left(\frac{\alpha \cdot \rho \cdot A}{\lambda}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \left(\frac{0,4 \cdot 0,4}{0,05}\right)^{\frac{1}{1-0,4}} = 6,95 \text{ тыс. руб./чел.}$$

Народнохозяйственная производительность труда на стационарной траектории

$$y^0 = \left(k^0\right)^{\alpha} = 32^{0,4} = 4 \text{ тыс. руб./чел.}$$

Удельные инвестиции на одного занятого на стационарной траектории

$$i^0 = \rho \cdot y^0 = 0,4 \cdot 4 = 1,6 \text{ тыс. руб./чел.}$$

Среднедушевое потребление на одного занятого на стационарной траектории

$$c^0 = \left(1-\rho\right) y^0 = 0,6 \cdot 4 = 2,4 \text{ тыс. руб./чел.}$$

Народнохозяйственная производительность труда в начальный момент времени

$$y_0 = k_0^{\alpha} = 4^{0,4} = 1,74 \text{ тыс. руб./чел.}$$

Среднедушевое потребление на одного занятого в начальный момент времени

$$c_0 = \left(1-\rho\right) y_0 = 0,6 \cdot 1,74 = 1,04 \text{ тыс. руб./чел.}$$

Траектория фондовооруженности определяется формулой **(5.17)** и при полученных данных может быть представлена в виде:

$$k^{0,6}\left(t\right) = 8 + \left(2,3-8\right) \cdot e^{-0,03 \cdot t}.$$

Подставив сюда $k(t) = 0,9 \cdot 32 = 28,8$, получим:

$$7,51 - 8 = -5,7 \cdot e^{-0,03 \cdot t}; \quad e^{0,03 \cdot t} = 11,63.$$

Прологарифмировав, получим:

$$t_{\text{пер}} = \frac{\ln 11,63}{0,03} = \frac{2,45}{0,03} = 81,8 \text{ года.}$$

Сопоставив полученные данные с данными задачи 5.2, видим, что среднедушевое потребление на одного занятого в начальный момент времени уменьшилось на $1,39 - 1,04 = 0,35$ тыс. руб./чел., а среднедушевое потребление на одного занятого на стационарной траектории увеличилось на $2,4 - 2,05 = 0,35$ тыс. руб./чел. В то же время интервал выхода на стационарную траекторию увеличился с 64,6 до 81,8 года.

Глава 6

Задача 6.1. Точку равновесия экономики находим из системы уравнений

$$\begin{cases} P = 0,8 \cdot Y, \\ Y = \dfrac{1000}{0,25 \cdot P}. \end{cases}$$

$$Y = \frac{1000}{0,25 \cdot 0,8 \cdot Y}; \; Y_1 = \sqrt{\frac{1000}{0,25 \cdot 0,8}} = 70,7; \; P_1 = 0,8 \cdot Y_1 = 0,8 \cdot 70,7 = 56,56.$$

Полученные результаты поясняются на рис. ОР.1. После наступления шока точка равновесия (Y_1, P_1) переместилась по кривой спроса в точку (Y_2, P_2). Выпуск сократился до $Y_2 = Y_1(1 - 0,25) = 70,7 \cdot 0,75 = 53$. Увеличится безработица, часть производственных фондов не будет задействована.

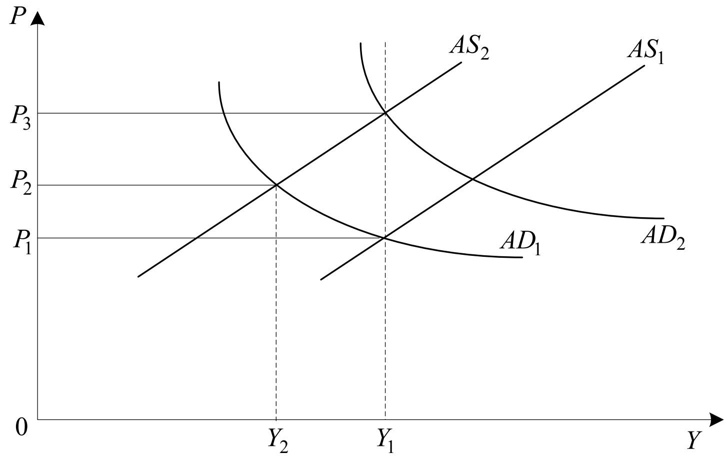


Рис. OP.1

Значение P_2 находим из уравнения $53 = \dfrac{1000}{0,25 \cdot P_2}$. Откуда $P_2 = 75,5$.

Шок привел к смещению линии предложения AS_1 вправо. Линия заняла новое место, соответствующее линии AS_2, которая пересекается с линией спроса в точке (Y_2, P_2). Угловой коэффициент у линии AS_2 будет тот же, что и у линии AS_1. Пусть линия AS_2 пересечется с осью $0P$ в точке P_0. Тогда уравнение прямой AS_2 примет вид: $P = 0,8 \cdot Y + P_0$. Эта прямая проходит через точку $(53; 75,5)$. Подставив координаты этой точки в полученное уравнение прямой, найдем $75,5 = 0,8 \cdot 53 + P_0$. Отсюда $P_0 = 33,1$. Таким образом, окончательно уравнение линии предложения AS_2 принимает вид: $P = 0,8 \cdot Y + 33,1$.

Если не принять никаких мер, то цены и выпуск будут постепенно выравниваться и через некоторый промежуток времени уменьшится безработица и экономика придет к исходному состоянию (Y_1, P_1). Весь этот процесс приведет к снижению уровня жизни людей. Чтобы избежать этих негативных последствий шока правительство может провести дополнительную эмиссию денег. Новое количество денег должно перевести состояние экономики в точку (Y_1, P_3). А это значит, что выпуск останется прежним, а цены увеличатся, т.е. будет иметь место инфляция. Найдем новую совокупную цену и новую массу денег.

Новую цену P_3 можно найти, подставив в уравнение прямой $P = 0,8 \cdot Y + 33,1$ значение выпуска $Y_1 = 70,7$. Тогда $P = 89,7$.

Эмиссия денег приведет к смещению линии совокупного предложения AD_1 вправо в положение линии AD_2. Линии AD_2 и AS_2 должны пересечься в точке $(70,7; 89,7)$. Поэтому новую массу денег можно найти из уравнения $Y = \dfrac{M}{0,25 \cdot P}$, подставив туда координаты этой точки. В результате получим:

$$M = 70,7 \cdot 0,25 \cdot 89,7 = 1585,4.$$

Анализ результатов данной задачи показывает, что умелое вмешательство правительственных органов помогает избежать негативных последствий шоков.

Задача 6.2. Функция потребления имеет вид:

$$E = 200 + 0,8 \cdot Y.$$

Сбережения для уровня дохода 1200 млрд руб. равны:

$$Y_1 - E_1 = 1200 - (200 + 0,8 \cdot 1200) = 40 \text{ млрд руб.}$$

Сбережения для уровня дохода 800 млрд руб.

$$Y_2 - E_2 = 800 - (200 + 0,8 \cdot 800) = -40 \text{ млрд руб.:}$$

Задача 6.3. Мультипликатор равен:

$$M = \frac{\Delta Y}{\Delta A} = \frac{20}{5} = 4.$$

Формулу для предельной склонности к потреблению получим из соотношения $M = \dfrac{1}{1-b}$. Отсюда $b = 1 - \dfrac{1}{M}$. Подставив сюда значение для мультипликатора, получим $b = 1 - \dfrac{1}{4} = 0,75$.

Задача 6.4. Найдем предельную склонность к потреблению из уравнения $2400 = 600 + b \cdot 2400$. Предельная склонность к потреблению равна:

$$b = \frac{2400 - 600}{2400} = 0,75.$$

Из формулы $E = A + bY$ при известном потенциальном равновесном объеме $E = Y = Y_{кл} = 3000$ млрд руб. выпуска и при полученной предельной склонности к потреблению находим:

$$A = Y_{кл} - bY_{кл} = 3000 - 0,75 \cdot 3000 = 750 \text{ млрд руб.}$$

Дефляционный разрыв равен:

$$\Delta A = A - A_0 = 750 - 600 = 150 \text{ млрд руб.}$$

Глава 7

Задача 7.1. Коэффициент наличности найдем по формуле

$$K1 = \frac{M0}{M2} = \frac{763,3}{2119,6} = 0,36, \quad \text{или} \quad 36\% .$$

Сумма безналичных денег равна:

$$2119,6 - 763,3 = 1356,3 \text{ млрд руб.}$$

Задача 7.2. Индекс цен за год равен:

$$I_p = \prod_{t=1}^{n}(1 + H_t) = 1,012 \cdot 1,01 \cdot 1,008 \cdot 1,006 \cdot 1,014 \cdot 1,003 \times$$

$$\times 1,009 \cdot 1,007 \cdot 1,002 \cdot 1,004 \cdot 1,003 \cdot 1,002 = 1,0829.$$

Находим темп прироста инфляции за год:

$$H = I_p - 1 = 1,0829 - 1 = 0,0829, \quad \text{или} \quad 8,29\% .$$

Среднемесячный темп прироста инфляции находим по формуле

$$\overline{H} = \sqrt[n]{I_p} - 1 = \sqrt[12]{1,0829} - 1 = 0,00666, \quad \text{или} \quad 0,666\% .$$

Задача 7.3. Из уравнения Фишера находим формулу для реальной доходности пенсионера:

$$a = r - \overline{H} = 4 - 9 = -5\% .$$

Таким образом, пенсионер теряет каждый год 5% своего вклада.

Задача 7.4. $K = \dfrac{B}{N} = \dfrac{480}{500} = 0,96, \quad \text{или} \ \ 96\%.$

Задача 7.5. *Вариант 1.* Предварительно определяем купонную годовую ставку $u = R/N = C \cdot p/N = 4 \cdot 100 / 5000 = 0,08$ годовых.

Расчетный курс находится по формуле

$$k = 0,08\frac{1-1,1^{-7}}{4\left(1,1^{1/4}-1\right)}+\frac{1}{1,1^{7}} = 0,91694674, \quad \text{или} \quad \approx 91,69\%.$$

Цена облигации $A = 5000 \cdot 0,91694674 = 4584,73$ руб.

Вариант 2. $u = 4 \cdot 125 / 5000 = 0,1$ годовых.

$$k = 0,1\frac{1-1,1^{-7}}{4\left(1,1^{1/4}-1\right)}+\frac{1}{1,1^{7}} = 1,0178939, \quad \text{или} \quad \approx 101,79\%.$$

$$A = 5000 \cdot 1,0178939 = 5089,47 \text{ руб.}$$

Задача 7.6. Суммарный депозит увеличится в $m_d = \frac{1}{rr} = \frac{1}{0,15} = 6,7$ раза.

Задача 7.7. Из условий задачи следует, что $r_d = \frac{R}{D} = 0,2$, $c_d = \frac{C}{D} = 0,3$. Тогда сумма резервов $R = 0,2 \cdot 100 = 20$ млрд руб., сумма наличности $C = 0,3 \cdot 100 = 30$ млрд руб., а денежная база

$$B = C + R = 20 + 30 = 50 \text{ млрд руб.}$$

Предложение денег рассчитывается по формуле

$$L^S = \frac{c_d + 1}{c_d + r_d} \cdot B = \frac{0,3+1}{0,3+0,2} \cdot 50 = 130 \text{ млрд руб.}$$

Глава 8

Задача 8.1. Для получения уравнения линии *IS* подставим исходные данные в основное макроэкономическое соотношение:

$$Y = C + I + G + X_n = 1000 + 0,75 \cdot \left(1-0,4\right) \cdot Y + 500 - 4600 \cdot r +$$
$$+ 500 + 400 - 0,05 \cdot Y - 800 \cdot r.$$

Проведя преобразования, найдем:

$$Y = 4000 - 9000 \cdot r.$$

Для получения уравнения линии LM в функцию спроса на реальные кассовые остатки подставим значения для $M = 3000$ и для $P = 3$:

$$\frac{3000}{3} = \frac{Y}{3} - 1000 \cdot r.$$

Отсюда находим уравнение кривой LM:

$$Y = 3000 + 3000 \cdot r.$$

Для получения равновесного уровня процентной ставки приравняем правые части уравнений линий IS и LM:

$$4000 - 9000 \cdot r = 3000 + 3000 \cdot r.$$

Отсюда находим равновесный уровень процентной ставки:

$$r_0 = 0,0833, \quad \text{или} \quad 8,33\%.$$

Равновесный уровень дохода равен:

$$Y_0 = 3000 + 3000 \cdot r_0 = 3000 + 3000 \cdot 0,0833 = 3250.$$

Задача 8.2. Равновесный уровень процентной ставки для первоначальных условий примера был определен в задаче 8.1 и составил:

$$r_0 = 0,0833, \quad \text{или} \quad 8,33\% \text{ и } Y_0 = 3250\,.$$

Полученное там же уравнение линии LM имеет вид:

$$Y = 3000 + 3000 \cdot r\,,$$

а уравнение линии IS имеет вид:

$$Y = 4000 - 9000 \cdot r.$$

При уменьшении ставки прямого налогообложения до 26,7% уравнение линии IS преобразуется к виду:

$$Y = 1000 + 0,75 \cdot \left(1 - 0,267\right) \cdot Y + 500 - 4600 \cdot r + 500 + 400 - 0,05 \cdot Y - 800 \cdot r.$$

Проведя преобразования, найдем

$$Y = 4800 - 10\,800 \cdot r.$$

Равновесный уровень новой процентной ставки находим из уравнения

$$4800 - 10\,800 \cdot r = 3000 + 3000 \cdot r;$$

$$r_1 = 0,1304, \quad \text{или} \quad 13,04\%.$$

Равновесный уровень нового выхода равен:

$$Y_1 = 3000 + 3000 \cdot r_1 = 3000 + 3000 \cdot 0,1304 = 3391,2.$$

Для того чтобы процентная ставка осталась равной 8,33%, необходимо повысить денежное предложение с величины M до M_1. Тогда уравнение кривой LM можно представить в виде:

$$Y = M_1 + 3000 \cdot r.$$

Новое значение денежного предложения найдем из уравнения

$$4800 - 10\,800 \cdot r = M_1 + 3000 \cdot r,$$

подставив сюда величину процентной ставки, равную 8,33%:

$$M_1 = 4800 - 13\,800 \cdot 0,0833 = 3650,46.$$

Новое значение выпуска равно:

$$Y_2 = 4800 - 10\,800 \cdot r = 4800 - 10\,800 \cdot 0,0833 = 3900,36.$$

Задача 8.3. По условиям примера имеем следующие показатели: автономное потребление $a = 1000$, предельная склонность к потреблению $b = 0,75$, предельная величина инвестиций при $r \to 0$ $I_0 = 500$, коэффициент пропорциональности $d = 4600$, предельная величина инвестиций при $r \to 0$ и $Y \to 0$ $X_{n0} = 400$, предельная склонность к импортированию $m' = 0,05$, коэффициент пропорциональности $g = 800$, коэффициенты пропорциональности $k = 1/3$ и $h = 1000$. Налог $T = tY$, где t — налоговая ставка. Из решения задачи 8.1 имеем в точке равновесия $Y_0 = 3250$:

$$Y = \frac{1000\left(1000 - 0,75 \cdot 0,4 \cdot 3250 + 500 + 500 + 400\right)}{1000\left(1 - 0,75 + 0,05\right) + \dfrac{4600 + 800}{3}} +$$

$$+ \frac{4600 + 800}{1000\left(1 - 0,75 + 0,05\right) + \dfrac{4600 + 800}{3}} \cdot \frac{M}{P} = 679 + 2,57 \cdot \frac{M}{P}.$$

Для номинального предложения денег $M = 3000$ имеем:

$$Y = 679 + 2,57 \cdot \frac{3000}{P} = 679 + \frac{7714}{P}.$$

Таким образом, можно построить график совокупного спроса (рис. ОР.2).

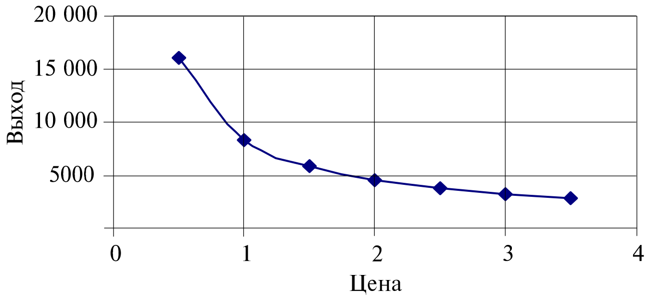


Рис. ОР.2. **Функция спроса**

Глава 9

Задача 9.1. Правая часть уравнения **(9.3)** равна $A = 200 + 1000 = 1200$. Величина выхода на стационарной траектории определяется по формуле $\overline{Y} = \dfrac{A}{1-b} = \dfrac{1200}{1-0,8} = 6000$. С учетом замены **(9.4)** конечно-разностное уравнение принимает вид:

$$y_t = (0,8+1)\,y_{t-1} - y_{t-2} = 1,8 \cdot y_{t-1} - y_{t-2}.$$

Корни уравнения равны:

$$\lambda_{1,2} = \frac{0,8+1 \pm \sqrt{(0,8+1)^2 - 4\cdot 1}}{2} = \frac{1,8 \pm 0,8718\cdot i}{2} = 0,9 \pm 0,4359\cdot i.$$

Выразим корни через экспоненту:

$$\lambda_{1,2} = \sqrt{0,9^2 + 0,4359^2}\,e^{\pm i\cdot \mathrm{arctg}\frac{0,4359}{0,9}} = e^{\pm i\cdot 0,48}.$$

Поскольку $\rho = 1$, то имеет место неустойчивое равновесие. Незначительное увеличение акселератора делает систему неустойчивой.

Решение **(9.8)** можно записать в виде:

$$y_t = B\cdot\cos(0,48\cdot t) + D\cdot\sin(0,48\cdot t).$$

Используя замену **(9.4)**, получим уравнение для истинного выхода:

$$Y_t = B\cdot\cos(0,48\cdot t) + D\cdot\sin(0,48\cdot t) + 6000.$$

B и D находят из начальных условий $Y_0 = 4000$, $Y_1 = 4200$. Подставив в полученное уравнение $t = 0$, получим $4000 = B + 6000$, или $B = -2000$. Подставив в уравнение $t = 1$, найдем:

$$4200 = -2000 \cdot \cos 0,48 + D \cdot \sin 0,48 + 6000 .$$

Отсюда находим

$$D = \frac{4200 - 6000 + 2000 \cos 0,48}{\sin 0,48} = -56 .$$

Таким образом, уравнение для истинного выхода имеет вид:

$$Y_t = -2000 \cdot \cos\left(0,48 \cdot t\right) - 56 \cdot \sin\left(0,48 \cdot t\right) + 6000.$$

График этой функции представлен на рис. ОР.3.

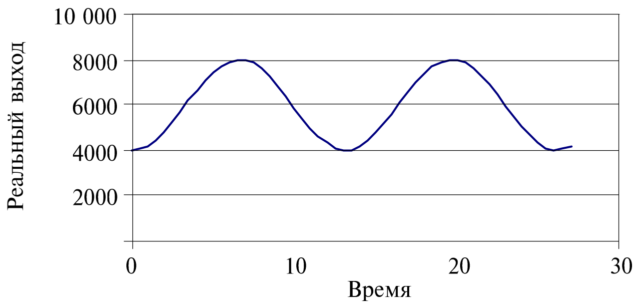


Рис. ОР.3. **Траектория при единичном акселераторе**

Задача 9.2. Правая часть уравнения **(9.11)** равна:

$$A = \left(200 + 1000\right)\left(1 + 0,03\right)^t = 1200 \cdot 1,03^t .$$

Величина выхода на стационарной траектории определяется по формуле **(9.12)**:

$$\overline{Y} = \frac{1200 \cdot 1,03^t}{1 - \dfrac{0,8 + 1}{1 + 0,03} + \dfrac{1}{\left(1 + 0,03\right)^2}} = 6153 \cdot 1,03^t .$$

С учетом замены конечно-разностное уравнение принимает вид: $y_t = \left(0,8 + 1\right) y_{t-1} - y_{t-2} = 1,8 \cdot y_{t-1} - y_{t-2}$. Корни уравнения равны:

$$\lambda_{1,2} = \frac{0,8+1\pm\sqrt{(0,8+1)^2-4\cdot 1}}{2} = \frac{1,8\pm 0,8718\cdot i}{2} = 0,9\pm 0,4359\cdot i.$$

Выразим корни через экспоненту:

$$\lambda_{1,2} = \sqrt{0,9^2+0,4359^2}e^{\pm i\cdot \mathrm{arctg}\frac{0,4359}{0,9}} = e^{\pm i\cdot 0,48}.$$

Решение **(9.8)** можно записать в виде:

$$y_t = B\cdot\cos(0,48\cdot t)+D\cdot\sin(0,48\cdot t).$$

Используя замену, получим уравнение

$$Y_t = B\cdot\cos(0,48\cdot t)+D\cdot\sin(0,48\cdot t)+6153\cdot 1,03^t.$$

B и D находят из начальных условий $Y_0 = 4000$, $Y_1 = 4200$. Подставив в полученное уравнение $t=0$, получим $4000 = B+6153$, или $B=-2153$. Подставив в уравнение $t=1$, найдем:

$$4200 = -2153\cdot\cos 0,48 + D\cdot\sin 0,48 + 6153\cdot 1,03.$$

Отсюда находим

$$D = \frac{4200-6153\cdot 1,03+2153\cos 0,48}{\sin 0,48} = -494.$$

Таким образом, уравнение для истинного выхода имеет вид:

$$Y_t = -2153\cdot\cos(0,48\cdot t)-494\cdot\sin(0,48\cdot t)+6153\cdot 1,03^t.$$

График этой функции представлен на рис. ОР.4.

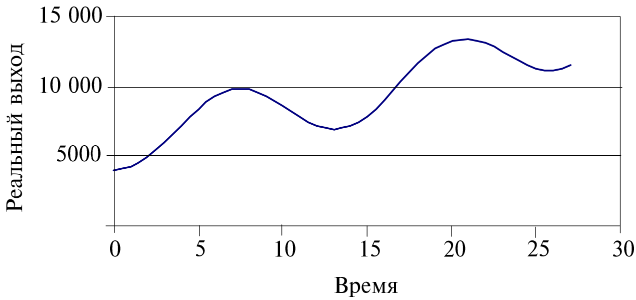


Рис. ОР.4. **Траектория при росте населения**

Задача 9.3. По условиям примера коэффициенты в уравнении **(9.14)** равны:

$$U = \frac{d \cdot k}{h} = \frac{4 \cdot 0,1}{2} = 0,2; \quad b + V = 0,76 + 0,82 = 1,58;$$

$$V + U = 0,82 + 0,2 = 1,02;$$

$$E = a + I_0 + \frac{d \cdot M}{h \cdot P} = 100 + 500 + \frac{4 \cdot 140}{2} = 880.$$

Величина выхода на стационарной траектории определяется по формуле

$$\overline{Y} = \frac{E}{1 - b + U} = \frac{880}{1 - 0,76 + 0,2} = 2000\ .$$

Неоднородное конечно-разностное линейное уравнение с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$Y_t = 1,58 \cdot Y_{t-1} - 1,02 \cdot Y_{t-2} + 880.$$

Введем замену

$$y = Y - \overline{Y} = Y - 2000.$$

Подставим замену в неоднородное конечно-разностное уравнение:

$$y_t + 2000 = 1,58 \cdot \left(y_{t-1} + 2000\right) - 1,02 \cdot \left(y_{t-2} + 2000\right) + 880.$$

Конечно-разностное уравнение принимает вид:

$$y_t = 1,58 \cdot y_{t-1} - 1,02 \cdot y_{t-2}.$$

Корни уравнения равны:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1,58 \pm \sqrt{1,58^2 - 4 \cdot 1,02}}{2} = \frac{1,58 \pm \sqrt{2,4964 - 4 \cdot 1,02}}{2} = 0,79 \pm 0,629 \cdot i.$$

Выразим корни через экспоненту:

$$\lambda_{1,2} = \sqrt{0,79^2 + 0,629^2} e^{\pm i \cdot \mathrm{arctg} \frac{0,629}{0,79}} = 1,01 e^{\pm i \cdot 0,8}.$$

Решение можно записать в виде:

$$y_t = 1,01^t \left(B \cdot \cos 0,8 \cdot t + D \cdot \sin 0,8 \cdot t\right).$$

Используя замену, получим уравнение

$$Y_t = 1{,}01^t\left(B\cdot\cos\left(0{,}8\cdot t\right) + D\cdot\sin\left(0{,}8\cdot t\right)\right) + 2000.$$

B и D находят из начальных условий $Y_0 = 1000$, $Y_1 = 1200$. Подставив в полученное уравнение $t = 0$, получим $1000 = B + 2000$, или $B = -1000$. Подставив в уравнение $t = 1$, найдем:

$$1200 = 1{,}01\cdot\left(-1000\cdot\cos 0{,}8 + D\cdot\sin 0{,}8\right) + 2000\ .$$

Отсюда находим:

$$D = \frac{\dfrac{1200-2000}{1{,}01} + 1000\cdot\cos 0{,}8}{\sin 0{,}8} = -133\ .$$

Таким образом, траектория для реального выхода имеет вид:

$$Y_t = 1{,}01^t\cdot\left(-1000\cdot\cos\left(0{,}8\cdot t\right) - 133\cdot\sin\left(0{,}8\cdot t\right)\right) + 2000.$$

График этой функции представлен на рис. ОР.5.

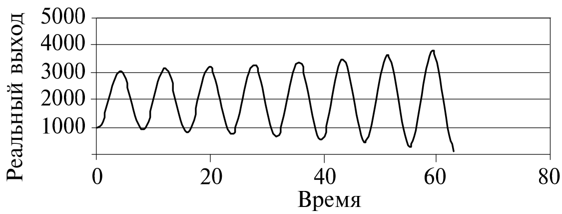


Рис. ОР.5. **Неустойчивая колебательная траектория выхода**

Глава 10

Задача 10.1. Уровень безработицы определяется как отношение количества безработных к рабочей силе по формуле

$$u = \frac{U}{L} = \frac{U}{N+U} = \frac{8}{80+8} = 0{,}091.$$

Доля потерявших работу равна:

$$\delta = \frac{n}{N} = \frac{9}{80} = 0{,}1125.$$

Доля устроившихся на работу

$$g = \frac{\upsilon}{U} = \frac{10}{8} = 1,25.$$

Задача 10.2. Из формулы Оукена находим:

$$\gamma = \frac{Y^* - Y}{Y^*} \Big/ \left(u - u^*\right).$$

Подставив сюда данные задачи, получим:

$$\gamma = \frac{4}{8-6} = 2.$$

Задача 10.3. Результаты расчета сведены в табл. ОР.2.

Таблица ОР.2

Год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
δ_t	8,9	9,1	8,9	9,08	8,96	8,9	9,0	9,5	9,6	9,56	9,5
$\overline{\delta}_{t-1}$	9,0	8,98	9,0	8,98	9,0	8,99	8,98	8,98	9,08	9,19	9,26
ε_t	−0,1	0,12	0,1	0,1	−0,04	−0,09	0,02	0,502	0,52	0,37	0,24
$\alpha\varepsilon_t \cdot 10^3$	−20	24	−20,8	19,36	−8,5	−18,9	4,88	104	103	74,6	48
$(1-\alpha)\overline{\varepsilon}_{t-1} \cdot 10^3$	0	−16	6,4	−11,52	6,27	−1,78	−16,5	−9,33	75,7	143	174
$\overline{\varepsilon}_t \cdot 10^3$	−20	8	−11,4	7,84	−2,23	−20,7	−11,67	94,6	178,7	218	222
$\alpha\lvert\varepsilon_t\rvert \cdot 10^3$	20	24	20,8	19,36	8,5	18,9	4,88	104	103	74,6	48
$(1-\alpha)\Delta_{t-1} \cdot 10^3$	64	67,2	73	75,04	75,5	67,2	68,9	59	130	187	209
$\Delta_t \cdot 10^3$	84	91,2	93,8	94,4	84	86,1	73,8	163	233	261	257
$T_t \cdot 10^2$	−24	8,8	−15	8,3	−2,7	−24	−16	58	77	83	86

В этой таблице введены следующие обозначения:

$$\varepsilon_t = \delta_t - \overline{\delta}_{t-1}; \quad \overline{\varepsilon}_t = \alpha\varepsilon_t + (1-\alpha)\overline{\varepsilon}_{t-1}; \quad \Delta_t = \alpha\left|\varepsilon_t\right| + (1-\alpha)\Delta_{t-1}; \quad T_t = \overline{\varepsilon}_t / \Delta_t .$$

До седьмого года величина контрольного сигнала мала. Начиная с восьмого года, величина контрольного сигнала растет: 0,58; 0,77; 0,83; 0,86. Это значит, что значимость неадекватности прогноза наблюдаемым значениям в соответствии с таблицей пороговых значений контрольного сигнала равна 95% для контрольного сигнала 0,58, т.е. для восьмого года. Значимость неадекватности прогноза наблюдаемым значениям для девятого, десятого и одиннадцатого годов лежит в интервале от 99 до 100%. Положительное значение контрольного сигнала указывает на то, что цена превышает прогноз.

Глава 11

Тест 11.1. D.

Тест 11.2. Если на графике цена акции падает во времени, то тренд называется медвежьим.

Задача 11.1. Доходность операции равна:

$$a = \frac{20 \cdot 6 - (100 + 6)}{100 + 6} = 0{,}132, \quad \text{или} \quad 13{,}2\% \text{ годовых.}$$

Из формулы для доходности от вложения денег $a = (1+i)\frac{P_1}{P} - 1$ находим формулу для годовой процентной ставки:

$$i = (1+a)\frac{P}{P_1} - 1.$$

Подставив данные в эту формулу, получим:

$$i = (1 + 0{,}132)\frac{106}{100} - 1 = 0{,}2, \quad \text{или} \quad 20\% \text{ годовых.}$$

Тест 11.3. Акции котируются на бирже, если они включены в котировальный лист.

Задача 11.2. Подставив исходные данные задачи в формулу для доходности, получим:

$$r = \frac{1+u}{\sqrt[n]{\frac{B}{N}}} - 1 = \frac{1{,}1}{\sqrt[5]{\frac{12\,500}{55\,000}}} - 1 = 0{,}1408, \quad \text{или} \quad 14{,}08\%.$$

Задача 11.3. Доходность определяется по формуле

$$r = \frac{1}{\sqrt[5]{0{,}85}} - 1 = 0{,}033, \quad \text{или} \quad 3{,}3\%.$$

Задача 11.4. Истинная цена облигации, ее дюрация и изгиб определяются по приведенным в тексте формулам:

$$A_0 = \frac{1000}{1,1} + \frac{1000}{1,1^2} + \frac{5000}{1,1^2} = 5867,77 \text{ руб.};$$

$$D = \frac{1}{5867,77} \cdot \left(\frac{1000}{1,1} + \frac{2 \cdot 1000}{1,1^2} + \frac{2 \cdot 5000}{1,1^2} \right) = 1,845 \text{ года};$$

$$C = \frac{1}{2 \cdot 5867,77} \cdot \left(\frac{2 \cdot 1000}{1,1^3} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 1000}{1,1^4} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 5000}{1,1^{2=4}} \right) = 2,223.$$

Изменение цены при учете дюрации и изгиба находится по формуле

$$\frac{\Delta A}{A_0} = -1,845 \frac{0,02}{1,1} + 2,223 \cdot 0,02^2 = -0,03266, \text{ или } -3,266\%,$$

а только дюрации — по формуле

$$\frac{\Delta A}{A_0} = -1,845 \frac{0,02}{1,1} = -0,03355, \text{ или } -3,355\%.$$

Задача 11.5. Проигравшей стороной является покупатель контрактов, так как он переплатит за каждую акцию 27 коп. Общее количество купленных по контракту акций $100 \cdot 100 = 10\,000$ шт. Таким образом, потери покупателя форвардных контрактов составят:

$$0,27 \cdot 10\,000 = 2700 \text{ руб.}$$

Задача 11.6. Отношение количества единиц иностранной валюты, купленной непосредственно на рынке, к количеству единиц иностранной валюты, купленной у продавца форвардного контракта, определим по формуле

$$\frac{V_n}{V} = \frac{1 + 0,12}{1 + 0,04} : \frac{33}{27} = 0,881.$$

Таким образом, по форвардному контракту можно купить на 19% процентов долларов больше.

Задача 11.7. Инвестор формирует спрэд быка, т.е. продает февральский контракт и покупает мартовский:

а) прибыль инвестора по ближнему контракту

$$\Pi_б = (34,5 - 34) \cdot 1000 = 500 \text{ руб.};$$

убытки инвестора по дальнему контракту

$$\Pi_д = (34,6 - 35) \cdot 1000 = -400 \text{ руб.};$$

общая прибыль $П = П_д + П_б = 100$ руб.;

б) убытки инвестора по ближнему контракту

$$П_б = (34 - 34,5) \cdot 1000 = -500 \text{ руб.};$$

прибыль инвестора по дальнему контракту

$$П_д = (35,4 - 35) \cdot 10\,000 = 400 \text{ руб.};$$

общие убытки $П = П_д + П_б = -100$ руб.

В варианте а) ожидания инвестора оправдались, и его общая прибыль равна 100 руб. В варианте б) ожидания инвестора не оправдались. Его убытки составили 100 руб.

Задача 11.8: а) инвестор покупает спрэд бабочки, т.е. он покупает ближний контракт $(A - A - a)$ и продает средний $(B + b - B)$ (спрэд медведя), а также продает средний контракт $(B + b - B)$ и покупает дальний $(C - C - c)$ (спрэд быка):

прибыли-убытки инвестора по спрэду медведя составят:

$$П_{мед} = (34,8 - 34,5) \cdot 1000 + (35 - 35,4) \cdot 1000 = -100 \text{ руб.};$$

прибыли-убытки инвестора по спрэду быка составят:

$$П_{бык} = (35 - 35,4) \cdot 1000 + (35,4 - 35,2) \cdot 1000 = -200 \text{ руб.};$$

общие убытки $П = П_{мед} + П_{бык} = -300$ руб.;

б) инвестор продает спрэд бабочки, т.е. он продает ближний контракт $(A + a - A)$ и покупает средний $(B - B - b)$ (спрэд быка), а также покупает средний контракт $(B - B - b)$ и продает дальний $(C + c - C)$ (спрэд медведя):

прибыли-убытки инвестора по спрэду быка составят:

$$П_{бык} = (34,5 - 34,8) \cdot 1000 + (35,4 - 35) \cdot 1000 = 100 \text{ руб.};$$

прибыли-убытки инвестора по спрэду медведя составят:

$$П_{мед} = (35,4 - 35) \cdot 1000 + (35,2 - 35,4) \cdot 1000 = 200 \text{ руб.};$$

общая прибыль $П = П_{бык} + П_{мед} = 300$ руб.

Тот же результат можно получить, используя полученные формулы. Для этого определим:

$$a = 34,5 - 34,8 = -0,3; \quad b = 35 - 35,4 = -0,4; \quad c = 35,2 - 35,4 = -0,2 .$$

При покупке спрэда бабочки прибыли-убытки инвестора в расчете на 1000 евро составят:

$$\Pi = \left(-a - c + 2b\right)\cdot 1000 = \left(0,3 + 0,2 - 2\cdot 0,4\right)\cdot 1000 = -300 \text{ руб.}$$

При продаже спрэда бабочки прибыль инвестора в расчете на 1000 евро составит:

$$\Pi = \left(a + c - 2b\right)\cdot 1000 = \left(-0,3 - 0,2 + 2\cdot 0,4\right)\cdot 1000 = 300 \text{ руб.}$$

Рассчитанные двумя методами результаты совпали.

Глава 12

Задача 12.1. Состав портфеля в оптимальной точке:

$$x_0 = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}} = \frac{0,9 - 0,2}{0,6 + 0,9 - 2\cdot 0,2} = 0,6364.$$

Доходность портфеля и риск в оптимальной точке:

$$a_{p,0} = x_0 a_1 + \left(1 - x_0\right) a_2 = 0,6364\cdot 0,12 + \left(1 - 0,6364\right)\cdot 0,2 = 0,1491;$$

$$\sigma_{p,0} = \sqrt{x_0^2\sigma_1^2 + \left(1 - x_0\right)^2\sigma_2^2 + 2x_0\left(1 - x_0\right)\sigma_{12}} =$$

$$= \sqrt{0,6364^2\cdot 0,6 + (1 - 0,6364)^2\cdot 0,9 + 2\cdot 0,6364\cdot (1 - 0,6364)\cdot 0,2} = 0,674.$$

Доходность портфеля и риск в крайних точках и в оптимальной точке представлены в табл. ОР.3.

Таблица ОР.3

x	1	0,6364	0
a_p	0,12	0,1491	0,2
σ_p	0,745	0,674	0,949

График доходность-риск портфеля представлен на рис. ОР.6.

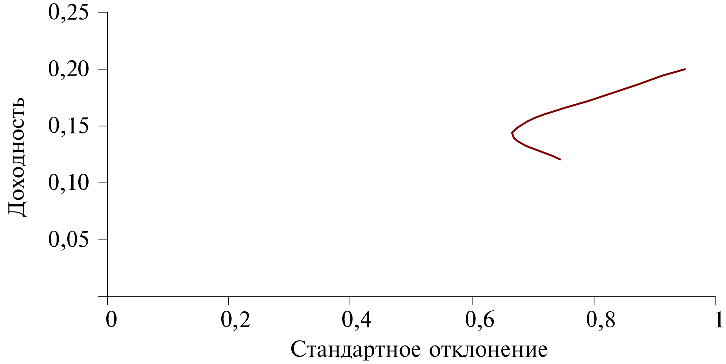


Рис. ОР.6. **График зависимости ожидаемой доходности оптимального портфеля от его риска**

Задача 12.2. Состав портфеля в оптимальной точке:

$$x_0 = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}} = \frac{1,2 - 0,3}{0,8 + 1,2 - 2 \cdot 0,3} = 0,643.$$

Доходность портфеля и риск в оптимальной точке:

$$a_{p,0} = x_0 a_1 + \left(1 - x_0\right) a_2 = 0,643 \cdot 0,15 + \left(1 - 0,643\right) \cdot 0,3 = 0,204;$$

$$\sigma_{p,0} = \sqrt{x_0^2 \sigma_1^2 + \left(1 - x_0\right)^2 \sigma_2^2 + 2x_0\left(1 - x_0\right)\sigma_{12}} =$$

$$= \sqrt{0,643^2 \cdot 0,8 + (1 - 0,643)^2 \cdot 1,2 + 2 \cdot 0,643 \cdot \left(1 - 0,643\right) \cdot 0,3} = 0,588.$$

Доходность портфеля и риск в крайних точках и в оптимальной точке представлены в табл. ОР.4.

Таблица ОР.4

x	1	0,643	0
a_p	0,15	0,204	0,3
σ_p	0,894	0,788	1,095

График доходность-риск портфеля представлен на рис. ОР.7.

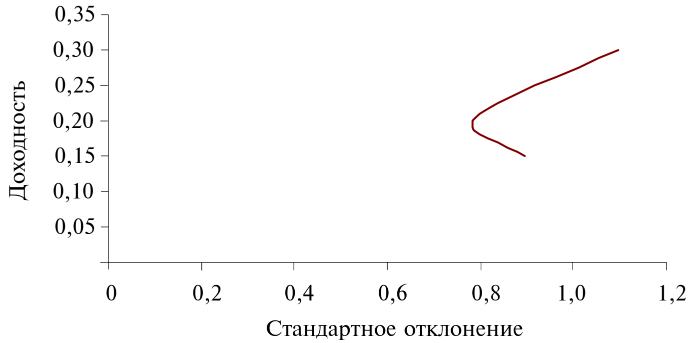


Рис. ОР.7. **График зависимости ожидаемой доходности портфеля от риска**

Задача 12.3. Для определения состава оптимального портфеля в экстремальной точке найдем обратную матрицу α^{-1} матрицы риска

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1{,}6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2{,}8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для расчета элементов обратной матрицы использованы программы Excel. Для этих целей:

1) вносят значения элементов матрицы в таблицу;
2) выделяют поле для записи обратной матрицы;
3) нажимают на кнопку « f_x »;
4) в категориях «Математические» выбирают функцию «МОБР»;
5) OK;
6) выделяют преобразуемую матрицу;
7) одновременно нажимают кнопки Ctrl+Shift+Enter.

Обратная матрица равна:

$$\alpha^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}495495 & -0{,}315315 & -0{,}180180 & 0{,}504505 \\ -0{,}315315 & 0{,}427928 & -0{,}112613 & 0{,}315315 \\ -0{,}180180 & -0{,}112613 & 0{,}292793 & 0{,}180180 \\ 0{,}504505 & 0{,}315315 & 0{,}180180 & -0{,}504505 \end{bmatrix}.$$

Далее находим матрицу-столбец состава портфеля:

$$\chi = \begin{bmatrix} 0,495495 & -0,315315 & -0,180180 & 0,504505 \\ -0,315315 & 0,427928 & -0,112613 & 0,315315 \\ -0,180180 & -0,112613 & 0,292793 & 0,180180 \\ 0,504505 & 0,315315 & 0,180180 & -0,504505 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,504505 \\ 0,315315 \\ 0,180180 \\ -0,504505 \end{bmatrix}.$$

Доли ценных бумаг первого (x_1), второго (x_2) и третьего (x_3) типов представлены соответственно в первой, второй и третьей строках матрицы-столбца состава портфеля.

Найдем доходность портфеля в этой точке и риск:

$$a_p = a'x = \begin{pmatrix} 0,09 & 0,16 & 0,22 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,5045 \\ 0,3153 \\ 0,1802 \end{pmatrix} = 0,1355;$$

$$\sigma_p^2 = x' \cdot \sigma \cdot x = \begin{pmatrix} 0,5045 & 0,3153 & 0,1802 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1,6 & 0 \\ 0 & 0 & 2,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,5045 \\ 0,3153 \\ 0,1802 \end{pmatrix} = 0,504505;$$

$$\sigma_p = 0,71.$$

Состав, доходность и риск портфеля в экстремальной точке записаны в табл. ОР.5.

Для определения состава оптимального портфеля найдем обратную матрицу A^{-1} матрицы риск-доходность:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0,09 & 1 \\ 0 & 1,6 & 0 & 0,16 & 1 \\ 0 & 0 & 2,4 & 0,22 & 1 \\ 0,09 & 0,16 & 0,22 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Обратная матрица равна:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0,081154 & -0,175834 & 0,094680 & -9,107304 & 1,738503 \\ -0,175834 & 0,380974 & -0,205140 & 3,065825 & -0,100090 \\ 0,094680 & -0,205140 & 0,110460 & 6,041479 & -0,638413 \\ -9,107304 & 3,065825 & 6,041479 & -200,180300 & 27,123530 \\ 1,738503 & -0,100090 & -0,638413 & 27,123530 & -4,179621 \end{bmatrix}.$$

Далее находим матрицу-столбец состава портфеля для доходности портфеля 0,15:

$$X=\begin{bmatrix} 0,081154 & -0,175834 & 0,094680 & -9,107304 & 1,738503 \\ -0,175834 & 0,380974 & -0,205140 & 3,065825 & -0,100090 \\ 0,094680 & -0,205140 & 0,110460 & 6,041479 & -0,638413 \\ -9,107304 & 3,065825 & 6,041479 & -200,180300 & 27,123530 \\ 1,738503 & -0,100090 & -0,638413 & 27,123530 & -4,179621 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,15 \\ 1 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 0,3724 \\ 0,3598 \\ 0,2678 \\ -2,9035 \\ -0,1111 \end{bmatrix}.$$

Доли ценных бумаг первого (x_1), второго (x_2) и третьего (x_3) типов представлены соответственно в первой, второй и третьей строках матрицы-столбца состава портфеля.

Риск портфеля в этой точке определяется по формуле

$$\sigma_p^2 = x'\cdot\sigma\cdot x = \begin{pmatrix} 0,3724 & 0,3598 & 0,2678 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1,6 & 0 \\ 0 & 0 & 2,8 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0,3724 \\ 0,3598 \\ 0,2678 \end{pmatrix} = 0,54662;$$

$$\sigma_p = 0,739.$$

Аналогичным образом находят состав и риск для других доходностей, которые представлены в табл. ОР.5.

Таблица ОР.5

a_p	0,1057	0,12	0,13	0,1355	0,15	0,17	0,1909
x_1	0,7758	0,6456	0,5545	0,5045	0,3724	0,1903	0
x_2	0,224	0,2676	0,2985	0,3153	0,3598	0,4211	0,4851
x_3	0,0002	0,0866	0,147	0,1802	0,2678	0,3886	0,5149
σ_p	0,826	0,74	0,715	0,71	0,739	0,862	1,059

График доходность-риск, построенный по данным табл. ОР.5, представлен на рис. ОР.8.

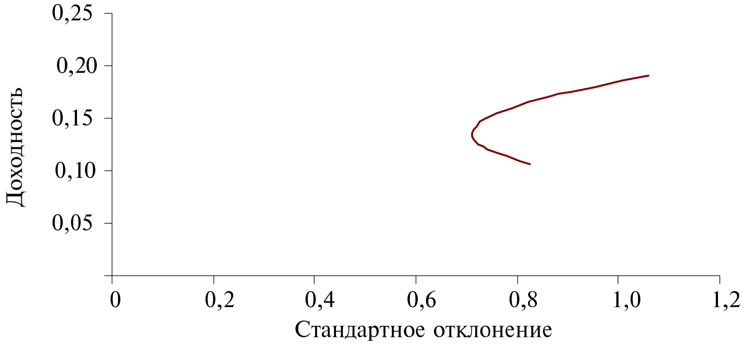


Рис. ОР.8. **Доходность-риск оптимального портфеля**

Задача 12.4. Состав портфеля для рисковых ценных бумаг первого, второго и третьего типов определен при решении задачи 12.3. Построен также график доходность-риск, представленный на рис. ОР.9 в виде кривой линии.

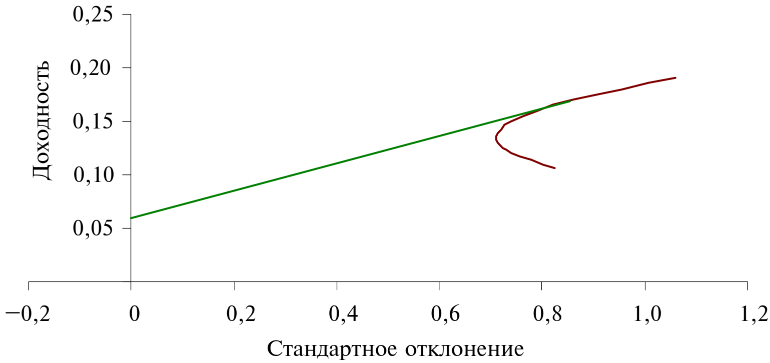


Рис. ОР.9. **Доходность-риск оптимального портфеля**

Функция ожидаемой доходности портфеля от среднего квадратичного отклонения имеет вид:

$$a_p = \frac{a_{p,k} - a_0}{\sigma_{p,k}} \cdot \sigma_p + a_0 ,$$

где $\sigma_{p,k}$, $a_{p,k}$ — координаты точки касания прямой линии и функции доходность-риск для рисковых ценных бумаг портфеля.

В точке касания безрисковые ценные бумаги отсутствуют, т.е. $x_0 = 0$. Доходность портфеля в точке касания можно найти из уравнения **(12.20)**. Запишем это уравнение в виде:

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \lambda \\ \mu \end{bmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ a_p \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ где } A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0,06 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0,09 & 1 \\ 0 & 0 & 1,6 & 0 & 0,16 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2,8 & 0,22 & 1 \\ 0,06 & 0,09 & 0,16 & 0,22 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

При значении доходности $a_{p,k} = 0,16887828$ имеем следующий состав оптимального портфеля:

$$x_0 = 0; \quad x_1 = 0,2005; \quad x_2 = 0,4176; \quad x_3 = 0,3819.$$

Дисперсию портфеля в точке касания найдем по первой формуле **(12.23)** для оптимального портфеля, состоящего из рисковых бумаг:

$$\sigma_p^2 = x'\sigma x = \begin{pmatrix} 0,2005 & 0,4176 & 0,3819 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1,6 & 0 \\ 0 & 0 & 2,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,2005 \\ 0,4176 \\ 0,3819 \end{pmatrix} = 0,7276.$$

Риск в точке касания равен:

$$\sigma_{p,k} = 0,853.$$

Таким образом, функция ожидаемой доходности портфеля от среднего квадратичного отклонения приобретает вид:

$$a_p = \frac{0,16887828 - 0,06}{0,853} \cdot \sigma_p + 0,06 = 0,128\sigma_p + 0,06.$$

График этой прямой показан на приведенном выше рис. ОР.9.

Так как инвестор выбрал для своего портфеля среднюю доходность 0,14, то доля бумаг в портфеле находится по формуле **(12.20)**:

$$X = \begin{bmatrix} 0,607738 & -0,724460 & -0,050960 & 0,167690 & -9,184570 & 1,551074 \\ -0,724460 & 0,944761 & -0,115080 & -0,105220 & 1,841298 & -0,110480 \\ -0,050960 & -0,115080 & 0,385248 & -0,219200 & 3,836037 & -0,230160 \\ 0,167690 & 0,105220 & -0,219200 & 0,156730 & 3,507234 & -0,210430 \\ -9,184570 & 1,841298 & 3,836037 & 3,507234 & -61,376600 & 3,682595 \\ 1,551074 & -0,110480 & -0,230160 & -0,210430 & 3,682595 & -0,220960 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,14 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,265235 \\ 0,147304 \\ 0,306883 \\ 0,280579 \\ -4,910130 \\ 0,294608 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, при средней доходности портфеля 14% годовых доля ценных бумаг в портфеле инвестора составит:

$$x_0 = 0,265; \quad x_1 = 0,147; \quad x_2 = 0,307; \quad x_3 = 0,281.$$

Риск портфеля инвестора определяется из уравнения

$$0,14 = 0,128\sigma_p + 0,06.$$

Этот риск равен:

$$\sigma_p = \frac{0,14 - 0,06}{0,128} = 0,625.$$

Глава 13

Задача 13.1. Фонд заработной платы при чистой прибыли, равной нулю, находят по формуле **(13.1)**:

$$\Phi = \frac{Д}{(1+g_Д)\cdot(1+g_Е)} = \frac{1\,000\,000}{(1+0,18)\cdot(1+0,26)} = 675\,585,42 \text{ руб., или } 35,6\%.$$

Начисленная сумма, с которой начнут вычитать подоходный налог с физических лиц, определяется по формуле

$$Z_{гр} = -\frac{\ln\eta}{\beta} + \varsigma = -\frac{\ln 0,6}{1,5\cdot 10^{-5}} - 4055,04 = 30\,000 \text{ руб.}$$

На первых 10 сотрудников начисляется заработная плата в размере:

$$Z_{1-10} = 675\,585,42 \cdot 0,05 = 33\,779,27 \text{ руб.}$$

На 11-го и 12-го сотрудника начисляется заработная плата $Z_{11} = 675\,585,42 \cdot 0,2 = 135\,117,08$ руб. и $Z_{12} = 675\,585,42 \cdot 0,3 = 202\,675,63$ руб. соответственно.

Подоходный налог на первых 10 сотрудников

$$N_{\Phi,1-10} = 33\,779,27\left(0,6 - e^{-1,5\cdot 10^{-5}\cdot 4055,04} \cdot e^{-1,5\cdot 10^{-5}\cdot 33\,779,27}\right) = 1116,99 \text{ руб.}$$

Подоходный налог на 11-го и 12-го сотрудника соответственно:

$$N_{\Phi,11} = 135\,117,08\left(0,6 - e^{-1,5\cdot 10^{-5}\cdot 4055,04} \cdot e^{-1,5\cdot 10^{-5}\cdot 135\,117,08}\right) = 64\,317,54 \text{ руб.;}$$

$$N_{\Phi,11} = 202\,675,63\left(0,6 - e^{-1,5\cdot 10^{-5}\cdot 4055,04} \cdot e^{-1,5\cdot 10^{-5}\cdot 202\,675,63}\right) = 112\,483,8 \text{ руб.}$$

Чистая заработная плата каждого из сотрудников:

$$З_{1-10} = 33\,779,27 - 1116,99 = 32\,662,28 \text{ руб.;}$$

$$З_{11} = 135\,117,08 - 64\,317,54 = 70\,799,54 \text{ руб.;}$$

$$З_{12} = 202\,675,63 - 112\,483,8 = 90\,191,83 \text{ руб.}$$

Задача 13.2. График зависимости ставки подоходного налога с физических лиц от величины начисляемой заработной платы представлен на рис. ОР.10.

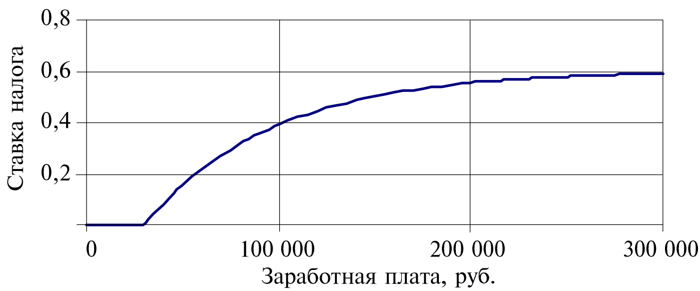


Рис. ОР.10. **Подоходная ставка налога с физических лиц**

Задача 13.3. График зависимости чистой заработной платы от величины начисляемой заработной платы представлен на рис. ОР.11.

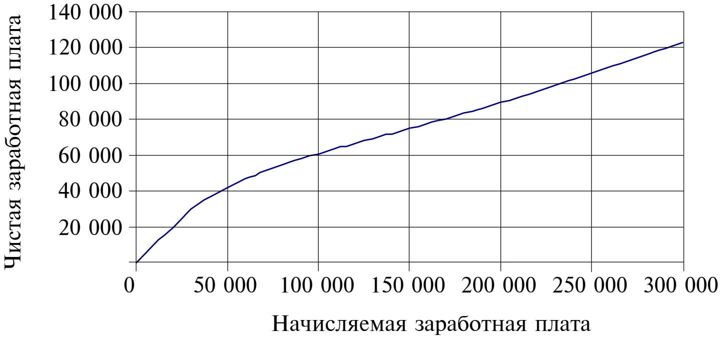


Рис. ОР.11. **Зависимость чистой заработной платы от начисляемой**

Задача 13.4. Алгоритм построения требуемых графиков сводится к следующему:

- предварительно строится таблица показателей (табл. ОР.6);
- в столбце 1 таблицы указаны отношения чистой прибыли к добавленной стоимости;
- в столбце 2 таблицы приведены отношения фонда заработной платы к добавленной стоимости;
- столбец 3 − фонд заработной платы;
- в столбцах 4—6 приведены начисленные заработные платы;
- в столбце 7 указано количество сотрудников, которые не выплачивают подоходный налог с физических лиц;
- столбец 8 − подоходный налог на физических лиц;
- в столбце 9 указаны отношения подоходного налога к добавленной стоимости;
- в столбце 10 приведены отношения подоходного налога к фонду заработной платы;
- в столбце 11 указаны эффективные налоговые ставки.

Графики, построенные по данным табл. ОР.6, приведены на рис. ОР.11.

Таблица ОР.6

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
П/Д	Ф/Д	Ф	*Z* (1—10)	*Z*11	*Z*12	*K*0	*N*Ф	*N*Ф/Д	*N*Ф/Ф	*N*/Д
0	0,6726	672585,42	33629,27	134517,08	201775,63	0	186432,83	0,1864	0,2772	0,5138
0,05	0,6204	620371,55	31018,58	124074,31	186111,47	0	160039,85	0,1600	0,2580	0,4897
0,1	0,5682	568157,68	28407,88	113631,54	170447,30	0	134441,64	0,1344	0,2366	0,4663
0,15	0,5159	515943,81	25797,19	103188,76	154783,14	10	119840,81	0,1198	0,2323	0,4539
0,2	0,4637	463729,95	23186,50	92745,99	139118,98	10	101163,40	0,1012	0,2182	0,4374
0,25	0,4115	411516,08	20575,80	82303,22	123454,82	10	82687,68	0,0827	0,2009	0,4212
0,3	0,3593	359302,21	17965,11	71860,44	107790,66	10	64643,25	0,0646	0,1799	0,4053
0,35	0,3071	307088,34	15354,42	61417,67	92126,50	10	47355,94	0,0474	0,1542	0,3903
0,4	0,2549	254874,47	12743,72	50974,89	76462,34	10	31281,41	0,0313	0,1227	0,3764
0,45	0,2027	202660,61	10133,03	40532,12	60798,18	10	17049,64	0,0170	0,0841	0,3644
0,5	0,1504	150446,74	7522,34	30089,35	45134,02	10	5523,87	0,0055	0,0367	0,3551
0,51	0,1400	140003,96	7000,20	28000,79	42001,19	11	4151,68	0,0042	0,0297	0,3541
0,52	0,1296	129561,19	6478,06	25912,24	38868,36	11	2904,80	0,0029	0,0224	0,3533
0,53	0,1191	119118,42	5955,92	23823,68	35735,53	11	1767,53	0,0018	0,0148	0,3526
0,54	0,1087	108675,64	5433,78	21735,13	32602,69	11	748,98	0,0007	0,0069	0,3521
0,545	0,1035	103454,26	5172,71	20690,85	31036,28	11	287,22	0,0003	0,0028	0,3518
0,547	0,1014	101365,70	5068,29	20273,14	30409,71	11	111,79	0,0001	0,0011	0,3517
0,548	0,1003	100321,43	5016,07	20064,29	30096,43	11	26,10	0,0000	0,0003	0,3517
0,549	0,0993	99277,15	4963,86	19855,43	29783,14	12	0,00	0,0000	0,0000	0,3517
0,55	0,0982	98232,87	4911,64	19646,57	29469,86	12	0,00	0,0000	0,0000	0,3518
0,6	0,0460	46019,00	2300,95	9203,80	13805,70	12	0,00	0,0000	0,0000	0,3540
0,644	0,0001	70,80	3,54	14,16	21,24	12	0,00	0,0000	0,0000	0,3559

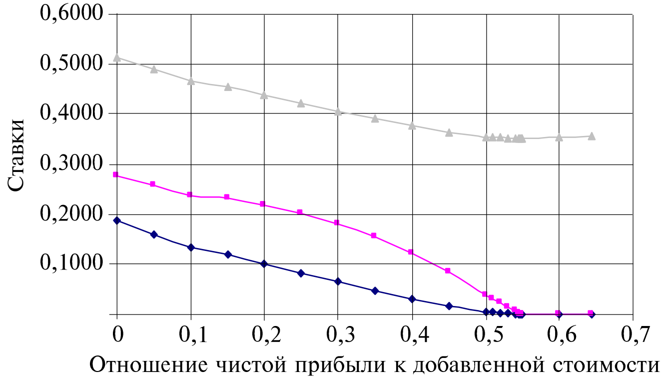


Рис. ОР.11. **Зависимости подоходного налога к добавленной стоимости и к фонду заработной платы и эффективной налоговой ставки от чистой прибыли:**

— отношение подоходного налога к добавленной стоимости;
— отношение подоходного налога к фонду заработной платы;
— эффективная налоговая ставка